Tema 13. Funciones Racionales.

13.1. Definición.

Una función racional es del tipo $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios ($Q(x)\neq 0$).

El objetivo de este tema es estudiar este tipo de funciones calculando:

- Dominio de la función. El dominio de las funciones racionales son todos los números reales menos aquellos valores que anulan el denominador.
  e.d. $Dom f = \mathbb{R} - \{x \,/\, Q(x)=0\}$.
- Asíntotas verticales. Se trata de ver que hace la función cerca de los ptos. que estan fuera del dominio.
- Asíntotas horizontales y oblicuas. Se trata de ver que hace la función cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.
- Puntos de corte con los ejes.

13.2. Asíntotas Verticales.

Las asíntotas verticales se encuentran en los ptos. que eliminamos del dominio.

Para ver que forma tiene la función cerca de estos ptos. se calculan los límites laterales de la función cuando x tiende a los ptos. que anulamos del dominio. (dicho límite tiene siempre la indeterminación $\frac{k}{0}$).

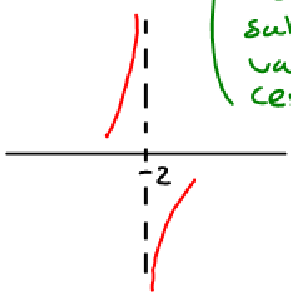
Ejemplo. Estudia las asíntotas verticales de $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$

Dom f? $x+2=0$
$x=-2 \Rightarrow Dom f = \mathbb{R}-\{-2\}$.

Luego tenemos una A.V. en $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{3x-1}{x+2} = \frac{-}{-} = +\infty$$

(así podemos saber lo que va a pasar cerca del -2)



$$\lim_{x\to -2^+} \frac{3x-1}{x+2} = \frac{-}{+} = -\infty$$

13.3. Asíntotas Horizontales.

Una asíntota horizontal es una recta constante a la cual se acerca la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$.

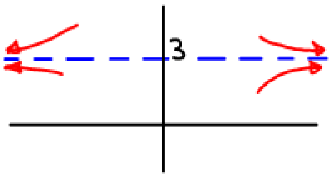
Para obtenerla se calcula el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$. (indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$).

La A.H. existe si estos límites da un número real. Y la recta constante es dicho número real.

Ejemplo. Calcula la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{x+2} = 3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x-1}{x+2} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Existe A.H en } y=3$$



Luego sabemos que en números muy grandes (positivos ó negativos) la función se acerca a $y=3$ (no sabemos si por encima o por debajo)

13.4. Asíntotas Oblicuas.

Las asíntotas oblicuas se estudian en el caso de que no existan asíntotas horizontales.

Para obtener la asíntota oblicua dividimos el numerador entre el denominador de la función. Si el cociente es un polinomio de grado 1, existe asíntota oblicua y coincide con dicho cociente. En cualquier otro caso, no existe A.O.

Ejemplo. Estudia las A.O. de la función $f(x) = \dfrac{3x^2+5x-1}{x+1}$

A.H.?

Esta función no tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x-1}{x+1} = \infty$.

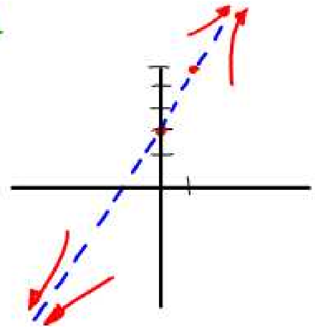
A.O?

$$\begin{array}{l|l} 3x^2+5x-1 & x+1 \\ \hline -3x^2-3x & 3x+2 \\ \quad\ \ 2x-1 & \\ \quad -2x-2 & \\ \qquad -3 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Existe A.O en $y = 3x+2$

$y = 3x+2$

x	y
0	2
1	5



Luego sabemos que en números muy grandes (positivos ó negativos) la función se acerca a $y=3x+2$ (no sabemos si por encima o por debajo)

13.5. Puntos de corte con los ejes.

- Eje OX. La función corta al eje OX cuando $y=0$, es decir, la primera coordenada de los ptos. de corte son las soluciones de la ecuación

  $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Rightarrow P(x)=0$ (la 2ª coordenada vale 0)

- Eje OY. La función corta al eje OY cuando $x=0$, para calcularlo sustituimos $x=0$ en la función.

  $y = f(0)$ (la 1ª coordenada vale 0)

13.6. Representación intuitiva de la gráfica.

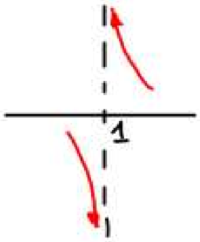
Uniendo todas las asíntotas y ptos. de corte podemos hacernos una idea de como va a ser la gráfica de la función.

Veamos un ejemplo. Estudia la función $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$

- Dom f. $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$
- A.V en $x=1$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x-1}{x-1} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{3x-1}{x-1} = \frac{+}{+} = +\infty$$

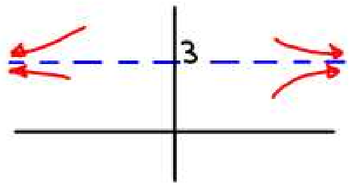


- A.H.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x-1}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-1}{x-1} = 3$$

$\Rightarrow \exists$ A.H en $y=3$



- A.O. No tiene (ya que existen A.H.)
- Ptos. de corte
  - Eje OX (cuando $y=0$)

$$\frac{3x-1}{x-1} = 0 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

  - Eje OY (cuando $x=0$)

$$f(0) = \frac{3\cdot 0-1}{0-1} = \frac{1}{1} \Rightarrow (0,1)$$

- Representación intuitiva.