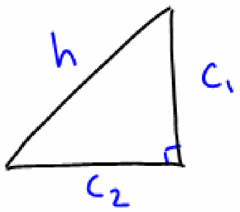
Colegio
EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Tema 7. Resolución de Triángulos.

7.1. Conceptos previos.

- Teorema de pitágoras.

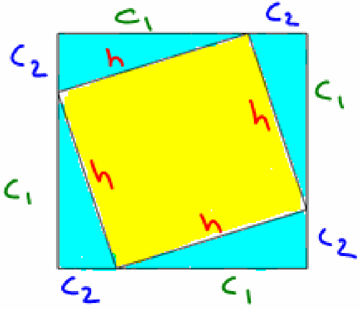
Dado un triángulo rectángulo cualquiera se tiene que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.



$$\boxed{h^2 = c_1^2 + c_2^2}$$

(Recuerda que la hipotenusa es el lado que esta en frente del angulo recto).

Demostración.



$$h^2 + 4 \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = (c_1 + c_2)^2$$

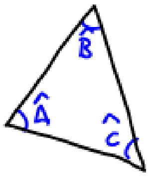
$$h^2 + 2c_1 \cdot c_2 = c_1^2 + 2c_1 \cdot c_2 + c_2^2$$

$$h^2 = c_1^2 + \cancel{2c_1c_2} + c_2^2 - \cancel{2c_1c_2}$$

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

- Relación entre los ángulos de un triangulo.

La suma de los tres ángulos de un triangulo cualquiera es 180°.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

- Relación entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipoten.}}$$

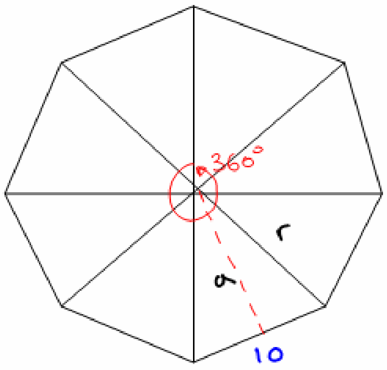
$$\cos \alpha = \frac{\text{cat. contiguo}}{\text{hipoten.}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. contiguo.}}$$

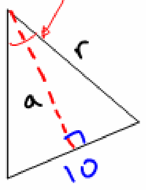
7.2. Aplicacion a la geometria. Poligonos regulares.

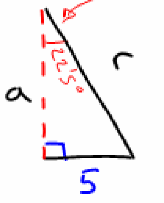
La trigonometría se utiliza para el cálculo de longitudes y áreas de figuras geométricas.

Ejemplo. Calcula el radio y la apotema de un octógono regular de lado 10 cm. Ademas calcula su área.



$$\begin{array}{l|l} 360° & \underline{\ 8\ } \\ \ \ 0 & \boxed{45°} \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 45° & \underline{\ 2\ } \\ \ 0 & 22'5 \end{array}$$



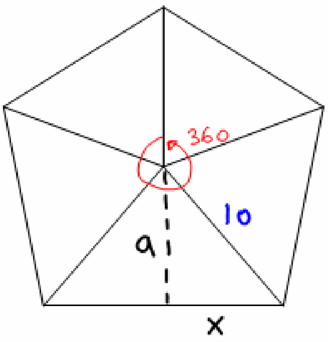


$$\text{sen } 22'5° = \frac{5}{r} \qquad \text{tg } 22'5° = \frac{5}{a}$$

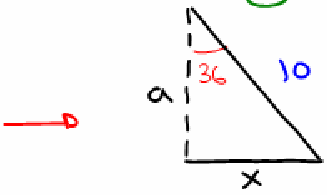
$$r = \frac{5}{\text{sen } 22'5} = 13'06 \text{ cm} \qquad a = \frac{5}{\text{tg } 22'5} = 12'07 \text{ cm}$$

$$A = 8 \cdot \frac{10 \cdot 12'07}{2} = 482'8 \text{ cm}^2$$

Ejemplo. Calcula el área del pentágono regular incrito en una circunferencia de radio 10 cm.



$$\begin{array}{l|l} 360° & \underline{\ 5\ } \\ \ \ 10 & 72° \\ \ \ \ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 72° & \underline{\ 2\ } \\ 12 & 36° \\ \ 0 & \end{array}$$



$$\text{sen} 36° = \frac{x}{10} \qquad \cos 36° = \frac{a}{10}$$

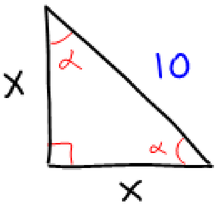
$$10 \cdot \text{sen} 36° = x \qquad 10 \cdot \cos 36° = a$$

$$x = 5'87 \text{ cm} \qquad a = 8'09 \text{ cm}$$

$$A_T = \frac{5'87 \cdot 8'09}{2} = 23'74 \text{ cm}^2$$

$$A_P = 2 \cdot 5 \cdot 23'74 = 237'4 \text{ cm}^2$$

Ejemplo. ¿Cuanto miden los catetos de un triángulo rectángulo isósceles sabiendo que la hipotenusa mide 10 cm?
¿Cuanto miden los ángulos?



Por Pitagoras $10^2 = x^2 + x^2$

$100 = 2x^2$

$\frac{100}{2} = x^2$

$50 = x^2$

$x = \sqrt{50} = 7'07$

$x = 7'07.$

Sabemos que la suma de los tres angulos es 180°

$90 + \alpha + \alpha = 180$

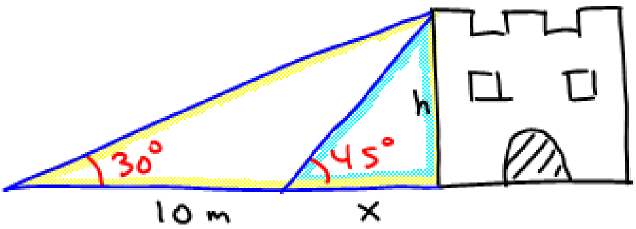
$2\alpha = 180 - 90$

$\alpha = 90/2$

$\alpha = 45°$

7.3. Aplicación a la topografía.

Ejemplo. Calcula la altura de la torre.



$$\left.\begin{aligned} tg\,45° &= \frac{h}{x} \\ tg\,30° &= \frac{h}{x+10} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{h}{x} \\ 0'57 &= \frac{h}{x+10} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{x = h}$$

$0'57 = \frac{h}{h+10}$

$0'57(h+10) = h$

$0'57h + 5'7 = h$

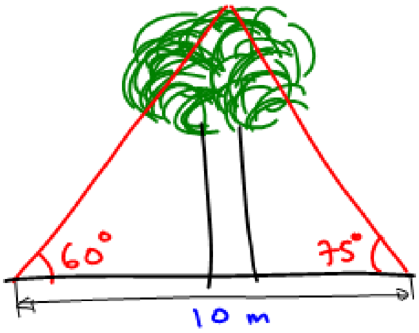
$0'57h - h = -5'7$

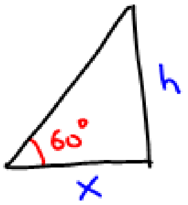
$-0'43h = -5'7$

$h = \frac{-5'7}{-0'43}$

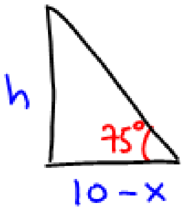
$h = 13'25$ m

Ejemplo. Calcula la altura del arbol.





$\Rightarrow \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x}$



$\rightarrow \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{h}{10-x}$

$$\left.\begin{array}{l} 1'73 = \frac{h}{x} \\ 3'73 = \frac{h}{10-x} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{h = 1'73x}$$

$$3'73 = \frac{1'73 \cdot x}{10-x}$$

$$3'73(10-x) = 1'73x$$

$$37'3 - 3'73x = 1'73x$$

$$37'3 = 1'73x + 3'73x$$

$$37'3 = 5'46x$$

$$x = \frac{37'3}{5'46} \Rightarrow x = 6'83 \text{ m}$$

$$h = 1'73 \cdot 6'83$$

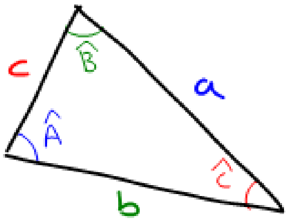
$$\boxed{h = 11'81 \text{ m.}}$$

7.4. Resolución de triángulos cualesquiera.

Teorema del seno y teorema del coseno.

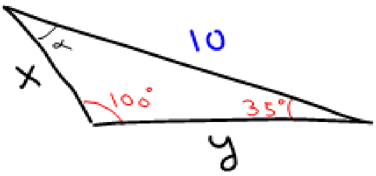
Todas las herramientas anteriores eran para triángulos rectángulos. Veamos dos fórmulas para un triángulo cualquiera

Teorema del seno. Los lados de un triangulo cualquiera son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



e.d. $\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$

Ejemplo. Calcula los lados y los angulos que faltan



α? $180° = \alpha + 100° + 35°$

$180° - 100° - 35° = \alpha$

$\alpha = 45°$

x? Por el teorema del seno

$$\frac{10}{\text{sen } 100°} = \frac{x}{\text{sen } 35°}$$

$$\frac{10}{0'98} = \frac{x}{0'57}$$

$$\frac{5'7}{0'98} = x \Rightarrow \boxed{x = 5'81}$$

y? Por teorema del seno

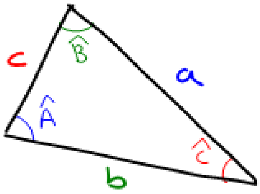
$$\frac{10}{\text{sen } 100°} = \frac{y}{\text{sen } 45°}$$

$$\frac{10}{0'98} = \frac{y}{0'7}$$

$$\frac{7}{0'98} = y$$

$$\boxed{y = 7'14}$$

Teorema del coseno. Dado un triángulo cualquiera se tiene que:

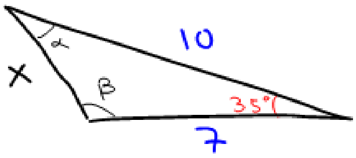


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Ejemplo. Calcula los lados y ángulos que faltan.



x? Por teorema del coseno.

$x^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos 35°$

$x^2 = 100 + 49 - 114'68$

$x^2 = 34'31$

$x = \sqrt{34'31} \Rightarrow \boxed{x = 5'85}$

β? Por teorema del seno

$$\frac{5'85}{\text{sen } 35°} = \frac{10}{\text{sen } \beta}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{10 \cdot \text{sen } 35°}{5'85}$$

$\text{sen } \beta = 0'98$

$\beta = \text{sen}^{-1} \, 0'98 = 78° \, 39' \, 30{,}67''$

$\alpha = 180° - 35° - 78° \, 39' \, 30{,}67'' = 66° \, 20' \, 29{,}33''$