Tema 2. Potencias y Raices de Numeros Reales

2.1. Potencias de exponente entero. Notación científica.

Propiedades de las potencias.

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad 3^7 \cdot 3^4 = 3^{11}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad 3^7 : 3^4 = 3^3$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad (3^7)^4 = 3^{7 \cdot 4} = 3^{28}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad 3^{-7} = \frac{1}{3^7}$$

Ejercicios

- Opera. $(3^2 \cdot 3^7)^3 : 9 = (3^9)^3 : 3^2 = 3^{27} : 3^2 = 3^{25}$

- Simplifica $\dfrac{a^3 \cdot a^{-2} \cdot a}{a^2 \cdot a^5} = \dfrac{a^{3-2+1}}{a^{2+5}} =$

$$= \frac{a^2}{a^7} = a^{2-7} = a^{-5}$$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Notacion cientifica

Un número en notación científica esta formado por:

- Una parte entera formada por una sola cifra distinta de 0.
- Una parte decimal.
- Una potencia de base 10 con exponente positivo o negativo.

Ejemplo.

$$3,17 \cdot 10^{8} = 317.000.000$$
$$1,23 \cdot 10^{-5} = 0,0000123$$

- Operaciones con notación científica.

– Sumar o restar. Para sumar o restar dos numeros en notacion cientifica debemos tener en ambos numeros el mismo exponente en la potencia del 10.

Ejemplo.

$$3,12 \cdot 10^{8} + 5,27 \cdot 10^{7} =$$
$$= 31,2 \cdot 10^{7} + 5,27 \cdot 10^{7} =$$
$$= 36,47 \cdot 10^{7} = 3,647 \cdot 10^{8}.$$

– Producto y cociente. Realizamos dos operaciones por separado. Primero multiplicamos o dividimos los numeros sin la potencia. Y por otro lado multiplicamos o dividimos las potencias

Ejemplo.

- $(3'16 \cdot 10^8) \cdot (1'2 \cdot 10^3) =$
$= (3'16 \cdot 1'2) \cdot (10^8 \cdot 10^3) =$
$= 3'792 \cdot 10^{11}.$

- $(3'16 \cdot 10^8) : (1'2 \cdot 10^3) =$
$= \dfrac{3'16 \cdot 10^8}{1'2 \cdot 10^3} = \dfrac{3'16}{1'2} \cdot \dfrac{10^8}{10^3} =$
$= 2'633 \cdot 10^5.$

2.2. Radicales.

Obtenemos la definición de raíz m-esima de un número a, a partir de las potencias de exponente fraccionario, es decir.

$$\boxed{\sqrt[m]{a} = a^{1/m}}$$

Es más, se puede definir:

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

- a la letra m se denomina índice
- a la parte interior de la raíz se denomina radicando.

Dos radicales se dice que son equivalentes si representan el mismo número real.

Ejemplos.

$\sqrt{5} = 5^{1/2}$

$\sqrt[3]{2^4} = 2^{4/3}$

$2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

$5^{-1/2} = \dfrac{1}{5^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$7^{-2/3} = \dfrac{1}{7^{2/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

2.3. Operaciones con radicales.

- Sacar un numero fuera de la raiz.

$$\sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2}\,\sqrt{2} =$$
$$= 2^{2/2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Si el exponente de dentro es mayor que el índice, tenemos que:
"Cada vez que restamos el índice al exponente podemos sacar una base fuera"

- $\sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2}$
- $\sqrt[3]{7^8} = 7\sqrt[3]{7^5} = 7 \cdot 7 \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7^2\sqrt[3]{7^2}$
- $a^{43/6} = \sqrt[6]{a^{43}} = a^7\sqrt[6]{a}$

$$\begin{array}{r|l} 43 & 6 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

- Suma o resta de radicales.

Los radicales solo se pueden sumar o restar si tienen el mismo índice y radicando.

Ejemplo. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.
$4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} =$ No se puede

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Antes de realizar la suma o resta tengo que asegurarme que los radicales no son iguales sacando todos los factores posibles fuera de la raiz.

Ejemplo. $5\sqrt{12} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{27} =$

$$= 5\sqrt{3\cdot 2^2} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3^3} =$$

$$= 5\cdot 2\cdot\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\cdot 3\sqrt{3} =$$

$$= 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 23\sqrt{3}.$$

· Producto y cociente de radicales

- Si dos radicales con el mismo índice están multiplicando o dividiendo podemos dejarlos en una única raiz, multiplicando o dividiendo los radicandos.

Ejemplo. · $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{3\cdot 2} = \sqrt{6}$

· $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{14}} = \sqrt[3]{\dfrac{7}{14}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

- Si dos radicales que están multiplicando o dividiendo tienen distinto índice, primero hay que pasarlos a expresion de potencia con exponente fraccionario y luego calcular el denominador común en los exponentes para conseguir que todos tengan el mismo índice

Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Ejemplos.

- $$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{7} = 5^{1/2}\cdot 7^{1/3} = 5^{\frac{3}{6}}\cdot 7^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{5^3\cdot 7^2}$$

- $$\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{21}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt{2^2\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{3\cdot 7}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{(2^2\cdot 3)^{1/2}\cdot(3\cdot 7)^{1/3}}{2^{3/4}} = \frac{(2^2\cdot 3)^{\frac{6}{12}}\cdot(3\cdot 7)^{\frac{4}{12}}}{2^{\frac{9}{12}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[12]{(2^2\cdot 3)^6}\cdot\sqrt[12]{(3\cdot 7)^4}}{\sqrt[12]{2^9}} = \frac{\sqrt[12]{2^{12}\cdot 3^6}\cdot\sqrt[12]{3^4\cdot 7^4}}{\sqrt[12]{2^9}} = \sqrt[12]{\frac{2^{12}\cdot 3^6\cdot 3^4\cdot 7^4}{2^9}} = \sqrt[12]{2^3\cdot 3^{10}\cdot 7^4}$$

2.4. Racionalización

Se utiliza para eliminar un radical en el denominador de una fracción.

- Si en el denominador solo hay un radical. Se multiplica y divide la fracción por otro radical con el mismo numero tal que elimine el radical del denominador.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{3}}}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2, 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

• Si en el denominador aparece la suma o resta de uno o dos radicales, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador, que es el mismo denominador pero cambiado de signo el segundo miembro.

$$\frac{3-\sqrt{2}}{5+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{2})(5-\sqrt{3})}{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})} = \frac{15-3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{15-3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+\sqrt{6}}{25-3} = \frac{15-3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+\sqrt{6}}{22}$$