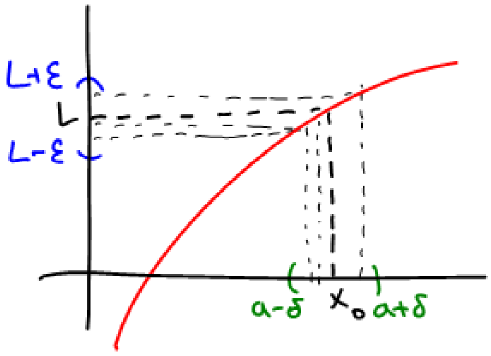
Tema 11. Límites de Funciones. Continuidad

11.1. Límite de una función

Sea f una función, se dice que L es el límite de f cuando x tiende x_0 $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = L\right)$, si:

dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 \;/\; |L - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

e.d. dado un número positivo muy pequeño (ε), existe un entorno del pto. de x_0 t.q. cualquier pto que pertenezca a este entorno se tiene que al aplicarle la función esta más cerca del límite que el ε dado.



Observación. El valor x_0 puede ser

- Un numero a.
- $+\infty$ ó $-\infty$.
- a^- : este se define como límite lateral por la izquierda, y es coger solo los ptos. que estan a la izquierda de a
  e.d $x \in (a - \delta, a)$
- a^+ : este se define como límite lateral por la derecha, y es coger solo los ptos. que estan a la derecha de a.
  e.d $x \in (a, a + \delta)$

Observación. El valor de L puede ser:

- Un numero real.
- $+\infty$ ó $-\infty$
- Puede ser que no exista el límite

11.2. Propiedades de los Límites.

Propiedades.

- El límite de una función en un pto, si existe, es único.

- Si los límites laterales de una función en un pto. coinciden se tiene que el límite de la función en ese pto. existe y tiene el mismo valor que los límites laterales

- Si los límites laterales de una función en un pto. no coinciden se tiene que no existe el límite de la función en ese pto.

- El límite de una función constante es la misma constante.

  e.d. $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$

11.3. Operaciones con límites.

- $$\lim_{x \to x_0} (f \pm g) = \left(\lim_{x \to x_0} f\right) \pm \left(\lim_{x \to x_0} g\right)$$

- $$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g) = \left(\lim_{x \to x_0} f\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g\right)$$

- $$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f}{\lim\limits_{x \to x_0} g} \qquad \left(\text{si } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

- $$\lim_{x \to x_0} \left(f^{g}\right) = \left(\lim_{x \to x_0} f\right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g}$$

11.4. Calculo de limites. Expresiones indeterminadas.

Para intentar calcular el limite de una funcion en un pto. primero sustituimos el pto en la variable de la funcion. Si el limite es directo obtendremos un número real, $+\infty$ ó $-\infty$, calculando así el limite.

P.e. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2-1}{2x} = \dfrac{3\cdot 1^2-1}{2\cdot 1} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Lo normal es que al intentar calcular el limite nos salga una expresión que carece de sentido llamada indeterminación.

Estas son. $\dfrac{k}{0}$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0 y 0^0

P.e. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{1^2-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ Indeterm.

11.5. Indeterminación $\frac{k}{0}$.

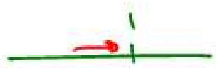
Para resolver este tipo de indeterminación, se calculan los límites laterales:

- Si coinciden $\Rightarrow$ la función tiene limite (que sera $+\infty$ ó $-\infty$)
- Si no coinciden $\Rightarrow$ No existe el limite de la función.

Ejemplo. Calcula.

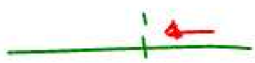
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x-1}{x^2-1} = \dfrac{3\cdot 1-1}{1^2-1} = \dfrac{2}{0}$ Indet.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x-1}{x^2-1} = \dfrac{+}{-} = -\infty$



$\neq$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x-1}{x^2-1} = \dfrac{+}{+} = +\infty$



$\Rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x-1}{x^2-1}$

11.6. Indeterminación $\frac{0}{0}$.

Para resolver este tipo de indeterminación, se factorizan el numerador y el denominador, tachando los factores que tengamos iguales y volviendo a calcular el límite con lo que nos queda.

Ejemplo. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \dfrac{2^2-5\cdot 2+6}{2^2-4} = \dfrac{0}{0}$ Indeter.

Factorizamos.

$x^2-5x+6 = (x-2)\cdot(x-3)$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & -5 & 6 \\
2 & & 2 & -6 \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
3 & & 3 & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ raiz} \\ (x-2) \text{ factor} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ raiz} \\ (x-3) \text{ factor} \end{cases}$

$x^2-4 = (x-2)(x+2)$

$x^2-4=0$

$x^2=4$

$x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

Luego $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x+2} =$

$= \dfrac{2-3}{2+2} = \dfrac{-1}{4}$

11.7. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Esta indeterminación se resuelve de la misma forma que en las sucesiones: dividir todos los términos del numerador y del denominador entre x elevado al grado del denominador.

Despues de simplificar las fracciones obtenidas volvemos a calcular el límite, que ya no saldrá indeterminación.

Ejemplo. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-1}{x+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeter.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}-\frac{1}{x}}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{3\cdot\infty-\overset{0}{\frac{1}{\infty}}}{1+\underset{0}{\frac{1}{\infty}}}$

$= \dfrac{\infty}{1} = \infty$

11.8. Continuidad de funciones.

Una funcion f se dice que es continua en un pto. $x=a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Para demostrarlo realizamos los siguientes pasos:

- Calcular $f(a)$
- Calcular $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$

Si los tres valores coinciden $\Rightarrow f$ es continua en $x=a$

Si no coinciden $\Rightarrow f$ es discontinua en $x=a$.

Una función se dice que es continua, si es continua en todos los ptos. de su dominio.

Ejemplo. Calcula la continuidad de

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \text{ para } x=1.$$

a) $f(1) = 2\cdot 1^2 - 1 = 2-1 = 1.$

b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3x+1 = 3\cdot 1+1 = 4$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x^2-1 = 2\cdot 1^2 - 1 = 1$

Los tres valores no son iguales

$\Rightarrow f$ es discontinua en $x=1$

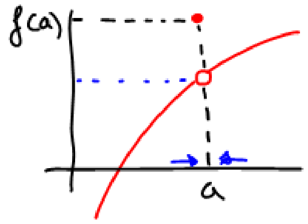
11.9. Tipos de discontinuidades.

Una vez que tengo una discontinuidad, puede pasar:

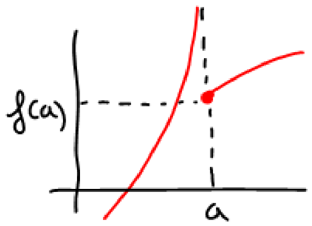
- Que $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$. En este caso se dice que tenemos una discontinuidad evitable.

- Que $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ y además:
  - Alguno de los limites vale $+\infty$ ó $-\infty$. Tenemos una discontinuidad inevitable de salto infinito
  - Los dos limites laterales son numeros reales. Tenemos una discontinuidad inevitable de salto finito.

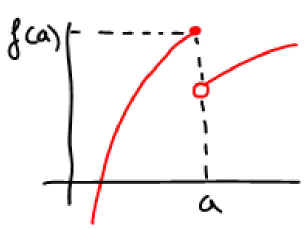
Ejemplos



En $x=a$ existe una discontinuidad evitable.



En $x=a$ existe una discontinuidad inevitable de salto infinito.



En $x=a$ existe una discontinuidad inevitable de salto finito