

Tema 5. Expresiones Fraccionarias

5.1. Fracciones Algebraicas.

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios.

P.e. $\frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1}$ es una fracción algebraica.

El valor numérico de una fracción algebraica se calcula sustituyendo las letras por números específicos dados con anterioridad.

Ejemplo. Calcula el valor numérico de $\frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1}$ para $x = -1$

$$P(-1) = \frac{3(-1)^2 - 5(-1) + 1}{2(-1) + 1} = \frac{3 + 5 + 1}{-2 + 1} = \frac{9}{-1} = -9$$

5.2. Simplificación de una fracción algebraica.

Para simplificar una fracción algebraica, debemos antes factorizar el numerador y el denominador de la fracción.

Simplificar es tachar los factores que tienen en común el numerador y el denominador, quedando una fracción equivalente (dos fracciones algebraicas son equivalentes si tienen el mismo valor numérico para cualquier número).

Ejemplo. Simplifica $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4} =$

Factorizamos los polinomios.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-2)(x-1)(x-3)$$

$\begin{array}{r rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 2 & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$	$\rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ raíz} \\ (x-2) \text{ factor} \end{cases}$
$\begin{array}{r rrrr} & 1 & & & \\ 1 & & 1 & -3 & \\ \hline & 1 & -3 & & 0 \end{array}$	$\rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ raíz} \\ (x-1) \text{ factor} \end{cases}$
$\begin{array}{r rrrr} & 1 & & & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & & & 0 \end{array}$	$\rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ raíz} \\ (x-3) \text{ factor} \end{cases}$

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x-1)(x-2)(x+1)$$

$\begin{array}{r rrrr} & 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}$	$\rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ raíz} \\ (x-1) \text{ factor} \end{cases}$
$\begin{array}{r rrrr} & 2 & & & \\ 2 & & 4 & & 4 \\ \hline & 2 & 2 & & 0 \end{array}$	$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ raíz} \\ (x-2) \text{ factor} \end{cases}$
$\begin{array}{r rrrr} & 2 & & & \\ -1 & & -2 & & \\ \hline & 2 & & & 0 \end{array}$	$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ raíz} \\ (x+1) \text{ factor} \end{cases}$

$$= \frac{\cancel{(x-2)} \cancel{(x-1)} (x-3)}{2 \cancel{(x-1)} \cancel{(x-2)} (x+1)} = \frac{x-3}{2(x+1)}$$

5.3. Suma y diferencia de fracciones algebraicas.

- Si tiene el mismo denominador. Sumo o resto los numeradores, dejando el mismo denominador

P.e. $\frac{3x+5}{x^2} - \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{3x+5-x^2-1}{x^2} = \frac{-x^2+3x+4}{x^2}$

- Si tienen distinto denominador. Buscamos que tengan denominador común, para conseguirlo calculamos el m.c.m. de los denominadores.

(m.c.m. es coger todos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente)

Obtenemos mas fracciones equivalentes que tienen:

- Como denominador el m.c.m calculado.
- Como numerador el resultado de dividir el m.c.m. entre el antiguo denominador y multiplicado por el antiguo numerador.

Ejemplo. Opera. $\frac{3x+1}{2x^2-8} + \frac{5x^2-1}{x+2} =$

Calculamos el m.c.m.

factorizamos los denominadores.

$$2x^2-8 = 2 \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 2 & 0 & -8 \\ & & 4 & 8 \\ \hline & 2 & 4 & 0 \\ -2 & & -4 & \\ \hline & 2 & & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ raíz} \\ (x-2) \text{ factor} \\ x=-2 \text{ raíz} \\ (x+2) \text{ factor} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{m.c.m} = 2(x+2)(x-2)$$

$$= \frac{3x+1}{2(x-2)(x+2)} + \frac{5x^2-1}{x+2} = \frac{3x+1}{2(x-2)(x+2)} + \frac{(5x^2-1) \cdot 2 \cdot (x-2)}{2(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{(3x+1) + (5x^2-1) \cdot (2x-4)}{2(x-2)(x+2)} = \frac{(3x+1) + (10x^3-20x^2-2x+4)}{2(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{10x^3 - 20x^2 + x + 3}{2(x-2) \cdot (x+2)}$$

5.1. Producto y Cociente de fracciones algebraicas.

• Producto de fracciones.

El producto de dos fracciones es una nueva fracción que tiene por:

- Numerador: el producto de los numeradores.
 - Denominador: el producto de los denominadores
- e.d. "se multiplica en línea".

Ejemplo.

$$\frac{3x+1}{x+2} \cdot \frac{x-1}{x+3} = \frac{(3x+1)(x-1)}{(x+2)(x+3)} = \frac{3x^2 - 3x + x - 1}{x^2 + 3x + 2x + 6} =$$

$$= \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + 5x + 6}$$

• División de fracciones.

Dividir dos fracciones es una nueva fracción que tiene por

- Numerador: el producto del numerador del primero por el denominador del segundo
- Denominador: el producto del denominador del primero por el numerador del segundo.

e.d. "Se multiplica en cruz".

Ejemplo.

$$\frac{3x+1}{x+2} : \frac{x-1}{x+3} = \frac{(3x+1) \cdot (x+3)}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{3x^2 + 9x + x + 3}{x^2 - x + 2x - 2} =$$

$$= \frac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + x - 2}$$