Tema 9. Sucesiones. Límites de sucesiones.

9.1. Definición de sucesión.

Una sucesión es una serie infinita de números ordenados que mantienen una cierta relación entre ellos.
tiene la forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$
donde los números $1, 2, 3, 4, \ldots$ indican la posición del término dentro de la sucesión (a estos números se les denomina índice), y los $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son los términos de la sucesión.

El término general de la sucesión (a_n), es la expresión algebraica que permite calcular cualquier término en función del índice.

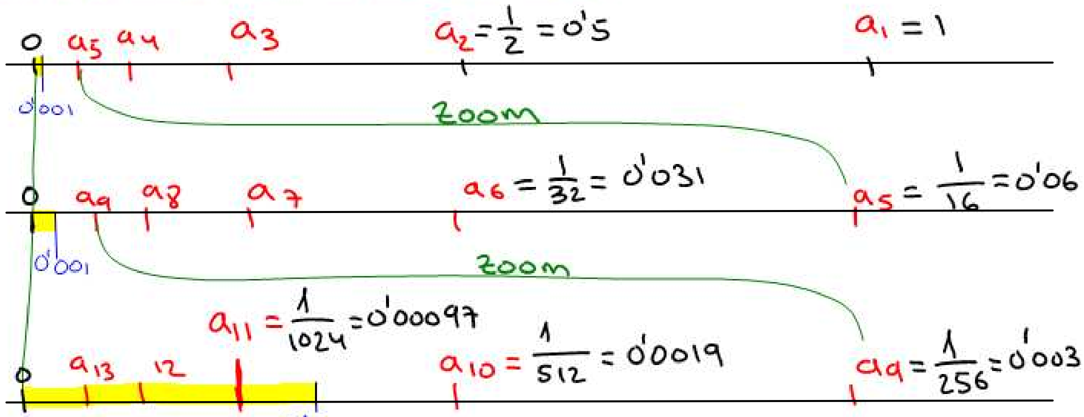
Ejemplo. $(1, 2, 4, 8, \ldots, 2n, \ldots)$ es una sucesión donde el término general es $a_n = 2n$.
¿Cuánto vale a_{30}? $a_{30} = 2 \cdot 30 = 60$

9.2 Definición de límite de una sucesión.

• Idea intuitiva del límite.

Veamos la sucesión $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$

La representamos en la recta real.



Si observamos la gráfica, vemos que los términos de la sucesión se van acercando cada vez más al 0.

Es más si fijamos un número cercano al cero, por ejemplo 0'001, podemos encontrar un término (en nuestro caso es a_{10}) que a partir de este todos los demás términos están más cerca del 0 que 0'001.

· Definición de límite de una sucesión. Sea $(a_n)_n$ una sucesión, se dice que L es el límite de la sucesión (se denota por $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, y se dice que a_n es convergente) si: dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ $|L - a_n| < \varepsilon$ - $n > n_0$.

e.d. si dado un número positivo muy pequeño, existe un termino de la sucesión a partir del cual todos los siguientes términos distan del límite menos que el numero pequeño escogido.

En el ejemplo visto anteriormente, habíamos observado que dado 0'001, podíamos encontrar un término (el a_{10}) que cumplía que a partir de este, todos los siguientes términos estaban mas cerca del 0 que 0'001.
luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejemplo. Sea $(a_n)_n = \left(\frac{6n+1}{2n}\right)_n$ una sucesión cuyo límite vale 3. Calcula el término a partir del cual todos los siguientes términos distan del límite menos que 0'01.

Sabemos que. $(a_n) = \left(\frac{6n+1}{2n}\right)$

$L = 3$

$\varepsilon = 0'01$, y nos piden n_0.

$$|L - a_n| < \varepsilon$$

$$\left|3 - \frac{6n+1}{2n}\right| < 0'01$$

$$\left|\frac{6n}{2n} - \frac{6n+1}{2n}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{\cancel{6n} - \cancel{6n} - 1}{2n}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{-1}{2n}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{100}$$

$$100 < 2n$$

$$\frac{100}{2} < n$$

$$50 < n$$

luego $\boxed{n_0 = 50}$

9.3. Sucesiones divergentes

Sea $(a_n)_n$ una sucesión. Se dice que la sucesión tiene límite infinito (y se denota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$) si dado un número grande K $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $a_n > K$ $\forall n > n_0$.

e.d. si dado un numero muy grande K, existe un término de la sucesión a partir del cual, todos los siguientes términos son mayores que K.

Sea $(a_n)_n$ una sucesión. Se dice que la sucesión tiene límite menos infinito (y se denota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) si dado un número grande K' negativo $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $a_n < K'$ $\forall n > n_0$.

e.d. si dado K' numero grande negativo, existe un término de la sucesión a partir del cual, todos los siguientes términos son menores que K'.

En ambos casos se dice que la sucesión es divergente.

Ejemplo. Dada la sucesión $(a_n) = (3n^2+1)$, calcula el termino a partir del cual los siguientes términos de la sucesión son mayores que 10.000

$$a_n > K$$

$$3n^2+1 > 10.000$$

$$3n^2 > 10.000 - 1$$

$$3n^2 > 9999$$

$$n^2 > \frac{9999}{3}$$

$$n^2 > 3333$$

$$n > \sqrt{3333} = 57'73$$, luego $n_0 = 57$.

Ejemplo. Dada la sucesión $(a_n) = (-2n+5)$, calcula el termino a partir del cual los siguientes términos de la sucesión son mayores que -1000

$a_n < k'$

$-2n+5 < -1000$

$-2n < -1000-5$

$-2n < -1005$

$n > \frac{-1005}{-2}$

$n > 502'5$ $\Rightarrow$ luego $n_0 = 502$

9.1 Operaciones con el infinito.

El símbolo ∞ representa un valor mayor que cualquier número real, y el símbolo $-\infty$ representa un valor menor que cualquier número real.

- Operaciones.

$a + (\pm\infty) = \pm\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$a - (\pm\infty) = \mp\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$+\infty + (+\infty) = +\infty$

$-\infty + (-\infty) = -\infty$

Si $a > 0$ $\quad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$

Si $a < 0$ $\quad a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$

$+\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$

$-\infty \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$

Si $a > 0$ $\quad a : (\pm\infty) = \pm\infty$

Si $a < 0$ $\quad a : (\pm\infty) = \mp\infty$

$\frac{a}{0} = +\infty$ ó $-\infty$

$\frac{a}{\pm\infty} = 0$

Si $a > 1 \longrightarrow \begin{cases} a^{\infty} = \infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases}$

Si $0 < a < 1 \rightarrow \begin{cases} a^{\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = \infty \end{cases}$

$(+\infty)^{+\infty} = \infty$

$(\pm\infty)^{-\infty} = 0$

9.5. Límite con operaciones de sucesiones.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$, donde k es una constante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

Ejemplo. Calcula los siguientes límites.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}+3\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} 3 =$$
$$= \frac{1}{\infty} + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot (2n+1) = \left(\lim_{n\to\infty} n^2\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} 2n+1\right) =$$
$$= \infty \cdot \infty = \infty .$$

9.6. Indeterminaciones.

Para calcular un límite lo primero que hacemos es sustituir todas las "n" de la sucesión por "∞". Aplicamos las operaciones con $\pm\infty$.

Puede ocurrir que salgan expresiones que no podemos decir hacia donde tienden (y para poder resolverlo habrá que hacerlo de otra forma).

Estas expresiones se denominan indeterminaciones, y las más importantes son:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0 .$$

Ejemplo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n} = \frac{3\cdot\infty+1}{2\cdot\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$ Indeterm.

9.7. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Se utiliza en límites de sucesiones racionales, ya que al sustituir n por ∞ en una sucesión racional queda siempre de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

El truco para calcular el límite es dividir todos los términos del numerador y del denominador entre n elevado al grado del denominador.

Después de simplificar las fracciones obtenidas volvemos a calcular el límite, que ya no saldrá indeterminación.

Veamos varios ejemplos.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-7}{n+3} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeter.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-7}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}} + \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} - \frac{7}{n}}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1-7/n}{1+3/n}$$

$$= \frac{3\cdot\infty + 1 - \frac{7}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-7}{n^3+3} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterm.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-7}{n^3+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^{\cancel{2}}}{n^3} + \frac{n}{n^3} - \frac{7}{n^3}}{\frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}} + \frac{3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{7}{n^3}}{1+3/n^3} =$$

$$= \frac{\frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} - \frac{7}{\infty^3}}{1+\frac{1}{\infty^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-7}{2n^2-1} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterm.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-7}{2n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} - \frac{7}{n^2}}{\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} - \frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}} = \frac{3+\frac{1}{\infty}-\frac{7}{\infty^2}}{2-\frac{1}{\infty^2}} =$$

$$= \frac{3}{2}$$

· Observación. El resultado del límite en este tipo de indeterminación depende del grado del numerador y del denominador. Luego tenemos que:

- Si grado numerador > grado denominador. Entonces el límite es siempre divergente (e.d $\pm\infty$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-7}{n+3} = \infty$$

- Si grado numerador < grado denominador. El límite siempre vale 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-7}{n^3+3} = 0$$

- Si grado numerador = grado denominador. El límite coincide con el cociente del coeficiente principal del numerador entre el coeficiente principal del denominador.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-7}{2n^2-1} = \frac{3}{2}$$

9.8. Indeterminación 1^∞.

Definición.

- Una sucesión $(a_1, a_2, \ldots)$ se dice creciente si
$$a_n \le a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
- Una sucesión $(a_1, a_2, \ldots)$ se dice decreciente si
$$a_n \le a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
- Una sucesión se dice acotada superiormente si
$$\exists\, K \in \mathbb{R} \;/\; a_n < K \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
- Una sucesión se dice acotada inferiormente si
$$\exists\, K \in \mathbb{R} \;/\; a_n > K \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
- Una sucesión se dice acotada si es acotada superiormente e inferiormente.

Proposición.

- Una sucesión creciente y acotada superiormente tiene límite convergente
- Una sucesión decreciente y acotada inferiormente tiene límite convergente

Estudio de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Definicion del numero e.

Queremos calcular el valor del $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Calculamos los primeros términos

$$a_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$$
$$a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2'25$$
$$a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=2'37$$
$$a_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=2'44$$

Observamos que la sucesión es creciente y esta acotada por el número 3. La sucesión tiene límite y a este límite lo llamamos e.

e.d. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

Ejemplos.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n-1}=\left(1+\underbrace{\frac{1}{2\cdot\infty}}_{\to 0}\right)^{3\infty-1}=1^\infty \text{ Indeter.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2n}\cdot(3n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{3n-1}{2n}}=$$

$$=\Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}_{=e}\Bigg)^{\overbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n}}^{=3/2}}=e^{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n-1}\right)^{4n} = 1^{\infty}$ Indet.

$$\frac{2n+5}{2n-1} = 1+\frac{1}{k}$$

$$\frac{2n+5}{2n-1} - 1 = \frac{1}{k}$$

$$\frac{2n+5}{2n-1} - \frac{2n-1}{2n-1} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{\cancel{2n}+5-\cancel{2n}+1}{2n-1} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{6}{2n-1} = \frac{1}{k}$$

$$\boxed{k = \frac{2n-1}{6}}$$

Luego $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n-1}\right)^{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{6}}\right)^{4n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{6}}\right)^{\frac{2n-1}{6}\cdot\frac{6}{2n-1}\cdot 4n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{6}}\right)^{\frac{2n-1}{6}}\right]^{\frac{6\cdot 4n}{2n-1}} =$$

$$= \left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{6}}\right)^{\frac{2n-1}{6}}}_{=e}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{24n}{2n-1} = \frac{24}{2} = 12} = e^{12}$$