Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614450. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Tema 8. Sucesiones. Progresiones.

8.1. Sucesiones.

Una sucesión es una serie infinita de numeros ordenados que mantienen una cierta relación entre ellos.
tiene la forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, ---)$
donde los números 1, 2, 3, 4, --- indican la posición del término dentro de la sucesión (a estos números se les denomina índice), y los $a_1, a_2, a_3, ---$ son los términos de la sucesión.

Ejemplos. $(2, 4, 6, 8, 10, ---)$ es una sucesión
¿Cual es el término 4° de la sucesión?
$a_4 = 8$

8.2. Término general. Sucesiones recurrentes.

El termino general de la sucesion, es una expresion algebraica que permite calcular cualquier término en función del índice.

Ejemplo.- $(2, 4, 6, ---, 2n, ---)$ es una sucesion donde el término general es $a_n = 2n$.
¿Cuanto vale a_{30}? $a_{30} = 2 \cdot 30 = 60$

- Calcula los 5 primeros términos de la sucesión que tiene como término general $a_n = (3n-1)^2$

$a_1 = (3 \cdot 1 - 1)^2 = 2^2 = 4$ $\quad a_4 = (3 \cdot 4 - 1)^2 = 11^2 = 121$
$a_2 = (3 \cdot 2 - 1)^2 = 5^2 = 25$ $\quad a_5 = (3 \cdot 5 - 1)^2 = 14^2 = 196$
$a_3 - (3 \cdot 3 - 1)^2 = 8^2 = 64$

Luego la sucesion es $(4, 25, 64, 121, 196, \dots, (3n-1)^2, \dots)$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Una sucesión se dice que es recurrente si para calcular un término necesitamos conocer los anteriores.

Ejemplo. La sucesión de Fibonacci.

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{matrix} \quad y \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

e.d un término sale a partir de la suma de los dos anteriores.

Los primeros términos de la sucesión serían:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots)$$

8.3. Operaciones con sucesiones.

- Suma o diferencia de dos sucesiones.

La suma (o diferencia) de dos sucesiones es otra sucesión cuyo término general es la suma (o diferencia) de los terminos generales.

Ejemplo. Sea $(a_n) = (1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots)$

y $(b_n) = (4, 7, 10, \dots, 3n+1, \dots)$

$$(a_n) + (b_n) = (1+4, 3+7, 5+10, \dots, (2n-1)+(3n+1), \dots) =$$

$$= (5, 10, 15, \dots, 5n, \dots)$$

- Producto de una sucesión por un numero.

El producto de una sucesión (a_n) por un número k es otra sucesión cuyo término general es el producto de k por el término general de a_n.

Ejemplo. Sea $(a_n) = (1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots)$

$$3 \cdot (a_n) = (3 \cdot 1, 3 \cdot 3, 3 \cdot 5, \dots, 3 \cdot (2n-1), \dots) =$$

$$= (3, 9, 15, \dots, 6n-3, \dots)$$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

- Producto de dos sucesiones.

El producto de dos sucesiones es otra sucesión cuyo término general es el producto de los terminos generales.

Ejemplo. Sea $(a_n) = (1, 3, 5, ..., 2n-1, ...)$

y $(b_n) = (4, 7, 10, ..., 3n+1, ...)$

$$(a_n)\cdot(b_n) = (1\cdot 4, 3\cdot 7, 5\cdot 10, ..., (2n-1)\cdot(3n+1), ...) =$$
$$= (4, 21, 50, ..., 6n^2+2n-3n-1, ...) =$$
$$= (4, 21, 50, ..., 6n^2-n-1, ...)$$

8.4. Progresiones aritméticas

Una progresión aritmética es una sucesión que cumple cualquier término se obtiene a partir del anterior sumandole un número fijo, llamado diferencia.

e.d. $a_n = a_{n-1} + d$

Ejemplo. $(a_n) = (\underbrace{3, 5}_{+2}, \underbrace{7}_{+2}, \underbrace{9}_{+2}, ...)$ es una progresion aritm. $(d=2)$

El término general de una progresión aritmética es:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$$

Ejemplo. En el ejemplo de arriba $a_1 = 3$ y $d = 2$

luego $a_n = 3 + (n-1)\cdot 2 = 3 + 2n - 2 = 2n+1$

¿a_{37}? $a_{37} = 2\cdot 37 + 1 = 75$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

8.5. Suma de los n primeros términos de una progresión aritmetica.

La suma de los n primeros términos (S_n) viene dada por la siguiente formula.

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}}$$

Ejemplo. Sea $(a_n) = (-3, 1, 5, 9, \ldots)$. Calcula a_n, a_{70} y la suma de los 70 primeros términos.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -3 \\ d = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_n = -3 + (n-1)\cdot 4 = -3 + 4n - 4 = 4n - 7$$

$$a_{70} = 4\cdot 70 - 7 = 273$$

$$S_{70} = \frac{(-3 + 273)\cdot 70}{2} = 9450$$

8.6. Progresiones geométrica

Una progresión geométrica es una sucesión que cumple cualquier término se obtiene a partir del anterior multiplicandolo por un número fijo, llamado razón.

e.d. $a_n = a_{n-1}\cdot r$

Ejemplo. $(a_n) = (3, 6, 12, 24, \ldots)$ es una progresion geom. $(r = 2)$

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24$$

El término general de una progresión geométrica es:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Ejemplo. En el ejemplo de arriba $a_1 = 3$ y $r = 2$

luego $a_n = 3\cdot 2^{n-1}$

¿a_7? $\quad a_7 = 3\cdot 2^{7-1} = 3\cdot 2^6 = 3\cdot 64 = 192$

8.7. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

La suma de los n primeros términos (S_n) viene dada por la siguiente formula.

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}} \qquad (r \neq 1)$$

Ejemplo. Sea $(a_n) = (2, 6, 18, \ldots)$. Calcula a_n, a_{10} y la suma de los 10 primeros términos.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ r = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \\ a_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} = 2 \cdot 3^9 = 39366 \end{array}$$

$$S_{10} = \frac{2 - 39366 \cdot 3}{1 - 3} = \frac{2 - 118098}{-2} =$$

$$= \frac{-118096}{-2} = 59048$$