Colegio EL TALLER Centro Concertado

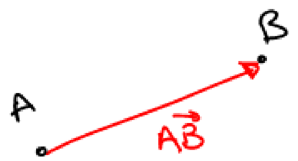
Tema 8. Geometría Analítica.

8.1. Vectores fijos en el plano.

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es el segmento orientado que tiene su origen en el pto. A y su extremo en el pto. B.

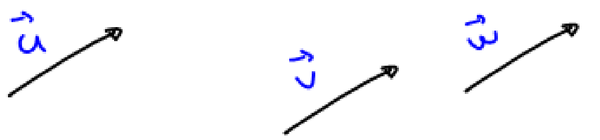
Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ del plano queda determinado por:

- Módulo. Longitud del segmento AB, se representa $|\overrightarrow{AB}|$
- Dirección. Es la inclinación respecto del eje horizontal de la recta que pasa por A y B.
- Sentido. Es la orientación de la recta.



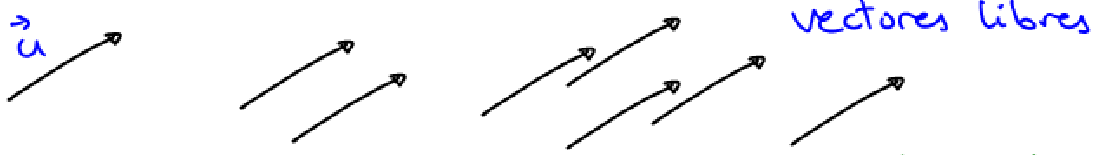
8.2. Vectores libres en el plano.

Definición. Dos vectores se dice que son equipolentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

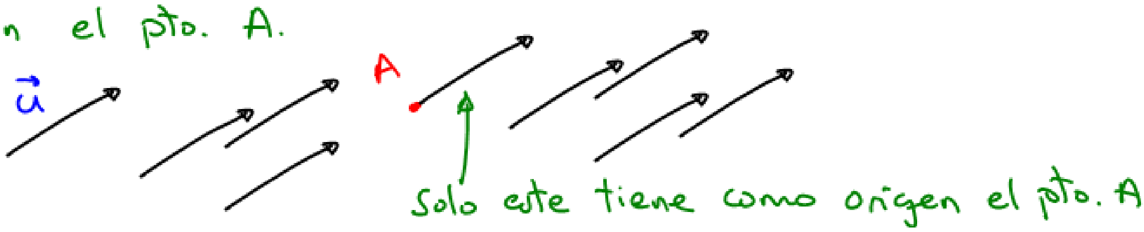


$\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son equipolentes.

Definición. Un vector libre en el plano es el conjunto de todos los vectores fijos equipolentes a uno dado.



Propiedad. Dado un pto. A y un vector libre $\vec{u}$, existe un único representante de este vector que tiene como origen el pto. A.



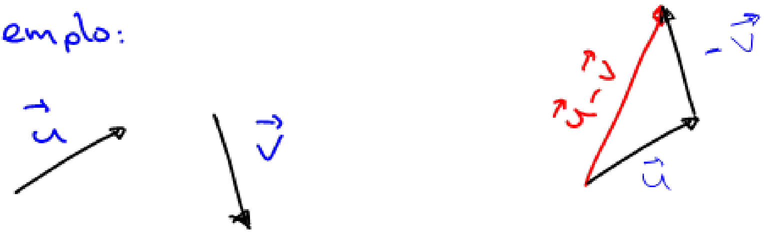
8.3. Operaciones con vectores libres.

• **Suma de dos vectores libres.** Dados $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores libres del plano. Para sumarlos, unimos el extremo de uno con el origen del otro. El vector suma $(\vec{u}+\vec{v})$ es un vector que tiene como origen, el origen del primero y que tiene como extremo, el extremo del otro.

Ejemplo:

• **Diferencia de dos vectores.** Es igual que sumar dos vectores, lo único que hay que hacer antes es cambiar de sentido el vector que lleva el signo "–" y después los sumamos.

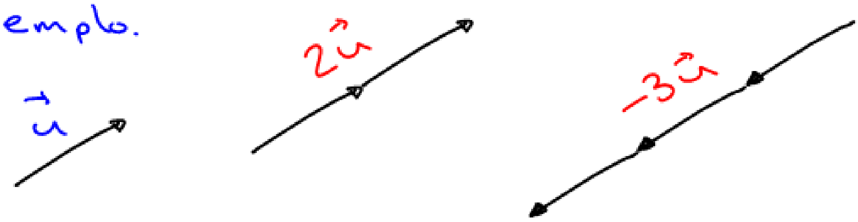
Ejemplo:



• **Multiplicar un vector por un número.** Dado un vector $\vec{u}$ y un número real k. El producto $k \cdot \vec{v}$ es un vector que tiene el mismo origen que $\vec{u}$ y que cumple.

- Su modulo es $k \cdot |\vec{u}|$
- Tiene la misma dirección que $\vec{u}$.
- Su sentido es
  - igual que $\vec{u}$ si $k>0$.
  - contrario que $\vec{u}$ si $k<0$.

Ejemplo.



8.4. Coordenadas cartesianas de vectores y ptos.

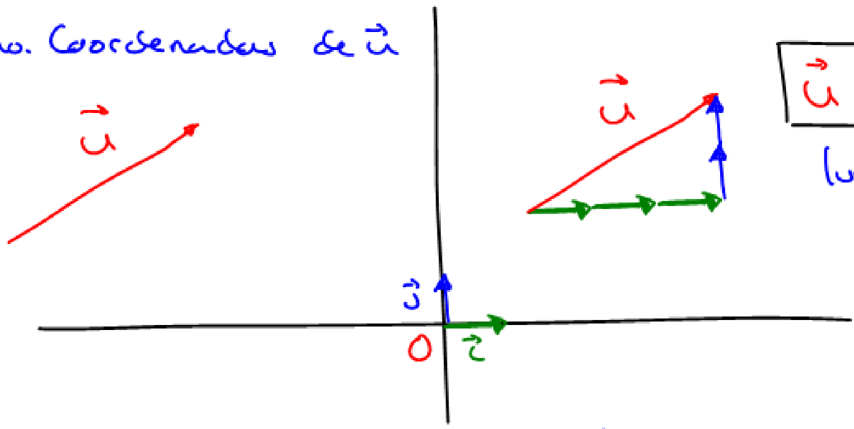
Definición. Un sistema de referencia $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ es un conjunto formado por un pto. O (llamado origen), y dos vectores (perpendiculares y de modulo 1) que son $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

Definición. Un vector $\vec{w}$ es combinación lineal de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si existen los números reales a y b tales que $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$

Propiedad. Dado $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ un sistema de referencia, cualquier vector libre del plano se puede poner como combinación lineal de los vectores $\vec{i}, \vec{j}$.
e.d. dado $\vec{v}$ un vector, $\exists\, a, b \in \mathbb{R} \;/\; \vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$.

Observación. A los números a y b se les denomina coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto del sist. de referencia R. y se denota $\vec{v} = (a, b)$.

Ejemplo. Coordenadas de $\vec{u}$

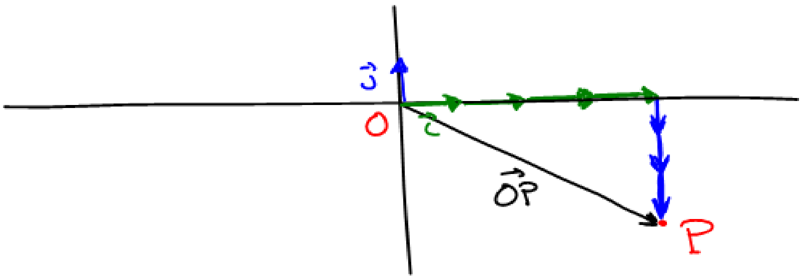


$\boxed{\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}}$

luego
$\vec{u} = (3, 2)$

Definición. Las coordenadas de un pto. P, respecto de un sistema de referencia $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ son las coordenadas del vector $\vec{OP}$ (que tiene como origen el pto. O y extremo el pto. P).

Ejemplo. Calcular las coordenadas del pto. P.



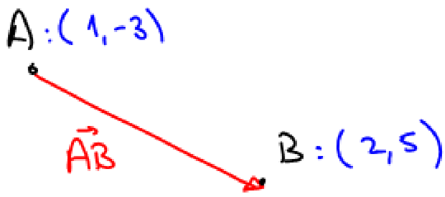
$\vec{OP} = 4\cdot\vec{i} + (-3)\cdot\vec{j} \Rightarrow \vec{OP} = (4,-3)$

$\Rightarrow$ las coordenadas de P son $(4,-3)$.

- Coordenadas de un vector libre a partir de dos ptos.

Sea $A:(x_1,y_1)$ y $B:(x_2,y_2)$ dos ptos. del plano.
Se tiene que $\boxed{\vec{AB} = (x_2-x_1,\, y_2-y_1)}$ $(\vec{AB} = B - A)$

Ejemplo



$\vec{AB} = (2-1,\ 5-(-3)) = (1,8)$

- Operaciones de vectores con coordenadas.

Sea $\vec{u} = (u_1,u_2)$ y $\vec{v} = (v_1,v_2)$ dos vectores, y sea k un número real, se tiene que.

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1,u_2) + (v_1,v_2) = (u_1+v_1,\, u_2+v_2)$$
$$k\cdot\vec{u} = k\,(u_1,u_2) = (ku_1,\, ku_2).$$

Ejemplo.

$\vec{u} = (3,-1)$, $\vec{v} = (5,2)$

$\vec{u}+\vec{v} = (3,-1) + (5,2) = (3+5,\, -1+2) = (8,1)$

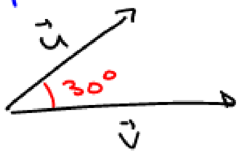
$3\vec{u} = 3\cdot(3,-1) = (3\cdot3,\ 3\cdot(-1)) = (9,-3)$

8.5. Producto escalar de dos vectores.

Dados $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores, se define el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{u,v})$$

Ejemplo.



Si $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 2$, calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{u,v}) =$$
$$= 3 \cdot 2 \cdot \cos 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

• Otra definición de producto escalar (sabiendo las coordenadas)

Sea $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$ dos vectores, podemos definir el producto escalar como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Ejemplo. Sea $\vec{u} = (3, -2)$ y $\vec{v} = (4, 1)$. Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 = 12 - 2 = 10$$

• Consecuencias del producto escalar

- $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0 \Rightarrow \vec{u}$ perpendicular a $\vec{v}$
- Sea $\vec{u} = (x_1, y_1)$ un vector $\Rightarrow$
  $\Rightarrow \vec{v} = (-y_1, x_1)$ es perpendicular a $\vec{u}$.

Ejemplos.

• ¿ $\vec{u} = (3, 5)$ es perpendicular a $\vec{v} = (0, 1)$?

No, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5 \neq 0$.

• Dado $\vec{u} = (3, 5)$, Halla un vector perpendicular a $\vec{u}$

el vector $\vec{v} = (-5, 3)$ es perpendicular a $\vec{u}$ ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 = -15 + 15 = 0$

8.6. Módulo de un vector. Ángulo que forman dos vectores.

- Módulo de un vector $\vec{u} = (x_1, y_1)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

- Ángulo de los vectores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$

Sabemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{u,v})$,

si despejamos el $\cos(\widehat{u,v})$ tenemos que.

$$\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Ejemplos.

- Calcula el módulo de $\vec{u} = (3, -2)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

- Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (3, 0)$

$$\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2}} = \frac{6}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

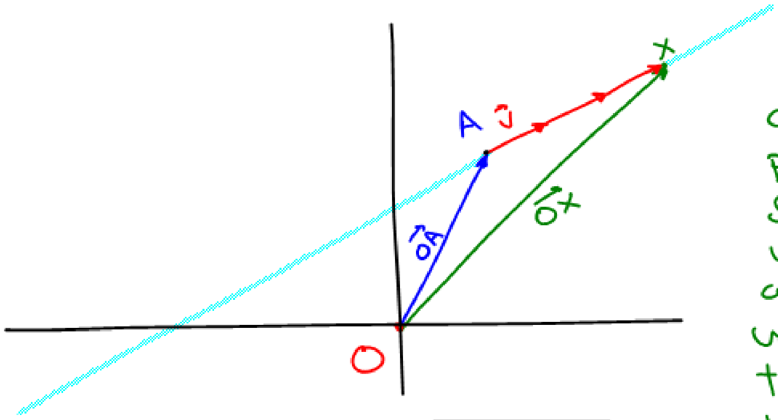
$$\alpha = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}} = 26^\circ\ 33'\ 54{,}18''$$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614450. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

8.7. Ecuaciones de la recta.

• Definición de recta: ecuación vectorial de la recta.

Una recta queda determinada a partir de un pto A y un vector $\vec{v}$, llamado vector director.



Observando el dibujo, para cualquier pto. X de la recta se tiene que el vector $\vec{OX}$ es igual a la suma del vector $\vec{OA}$ más tantas veces el vector $\vec{v}$.

es decir: $\boxed{\vec{OX} = \vec{OA} + t\cdot\vec{v}}$ donde $t \in \mathbb{R}$.

Tomando coordenadas, $A: (a_1, a_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $X: (x,y)$ un pto cualquiera de la recta.

$$\boxed{x, y = (a_1, a_2) + t\,(v_1, v_2)} \quad t \in \mathbb{R}$$

ecuación vectorial

• Ecuaciones paramétricas. Se obtienen haciendo las operaciones de la ecuación vectorial y separando las coordenadas.

Partimos de $(x,y) = (a_1, a_2) + t\,(v_1, v_2)$

$$(x,y) = (a_1, a_2) + (t v_1, t v_2)$$

$$(x,y) = (a_1 + t v_1,\ a_2 + t v_2)$$

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + t v_1 \\ y = a_2 + t v_2 \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

ecuac. paramétricas

Observación. Podemos llegar a esta ecuación sin pasar por la vectorial

$$\begin{matrix} x = a_1 + t\, v_1 \\ y = a_2 + t\, v_2 \end{matrix} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Coord. del pto. A

Coord. del vector $\vec{v}$.

Carretera de Fortuna, km 2, 30500 Molina de Segura
Tlfno 968614450. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

· Ecuación continua de la recta. Se obtiene despejando el parametro t de las ecuaciones parametricas e igualando las dos ecuaciones.

$$x = a_1 + t v_1 \Rightarrow x - a_1 = t \cdot v_1 \Rightarrow \frac{x-a_1}{v_1} = t$$

$$y = a_2 + t v_2 \Rightarrow y - a_2 = t \cdot v_2 \Rightarrow \frac{y-a_2}{v_2} = t$$

$$\boxed{\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2}}$$ ecuación continua.

Observación. Podemos llegar a esta ecuación sin pasar por la vectorial

coord. del pto. A

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2}$$

coord. del vector $\vec{v}$

· Ecuación general de la recta. Se obtiene quitando los denominadores de la ecuación continua y pasando todos los terminos a un lado de la igualdad, quedando una ecuacion de la siguiente forma.

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$ ecuac. general.

Observación. Esta ecuación no se puede obtener directamente. Hay que pasar por la ecuac. continua.

· El vector $\vec{n} = (A, B)$ es perpendicular a la recta (luego el vector $\vec{v} = (-B, A)$ es director de la recta).

· Ecuación explicita de la recta. Se obtiene despejando la incognita y en la ecuacion general, quedando de la forma:

$$\boxed{y = mx + n}$$ ecuación explicita.

Al numero m se le denomina pendiente y al número n se le denomina ordenada de origen.

Ejemplo. Calcular las ecuaciones de la recta que pasa por $A:(3,-1)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(-2,5)$

$$\boxed{(x,y)=(3,-1)+t\cdot(-2,5)} \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{ecuac. vectorial}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 - 2\cdot t \\ y = -1 + 5\cdot t \end{cases}} \quad t\in\mathbb{R}. \quad \text{Ecuac paramétricas}$$

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-(-1)}{5} \Rightarrow \boxed{\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{5}} \quad \text{Ecuac. continua}$$

$$5(x-3)=-2(y+1)$$
$$5x-15=-2y-2$$
$$5x-15+2y+2=0 \Rightarrow \boxed{5x-2y-13=0} \quad \text{Ecuac. general}$$

$$2y=-5x+13$$
$$y=\frac{-5x+13}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{5}{2}x+\frac{13}{2}} \quad \text{Ecuac. explicita}$$

• Ecuación punto-pendiente. Dado un pto $A:(a_1,a_2)$ La ecuación de la recta que pasa por A y tiene pendiente m, viene dada por la formula.

$$\boxed{y-a_2=m(x-a_1)} \quad \text{ecuac. pto-pendiente}$$

Ejemplo. Calcula la recta que pasa por $A:(3,-1)$ y es paralela a $y=2x+5$.

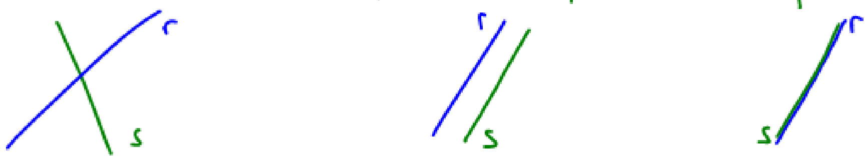
Al ser paralelas tienen la misma pendiente. Luego buscamos una recta que pasa por $A:(3,-1)$ y tiene pendiente $m=2$.

$$y-(-1)=2(x-3)$$
$$y+1=2x-6$$
$$y=2x-6-1 \Rightarrow \boxed{y=2x-7}$$

Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

8.8. Posición relativa de dos rectas en el plano.

Dadas dos rectas r y s. Sus posiciones posibles son:



a). Se cortan en un pto. b) Paralelas c) Coincidentes.

Para calcular la posición relativa de dos rectas resolvemos el sistema de ecuaciones que se crea al poner las ecuaciones de las dos rectas en forma general.

a) Si al resolver el sistema tiene una única solución (un valor para x y otro para y) ⇒ Se cortan en un pto.

b) Si al resolver el sistema sale $0 = k$ $(k \neq 0)$
⇒ Las rectas son paralelas.

c) Si al resolver el sistema sale $0 = 0$
⇒ Las rectas son coincidentes.

Ejemplo. Estudia la posición relativa de

$$r: 2x - y - 3 = 0$$
$$s: x + y - 3 = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \xRightarrow{\text{reducción}}$$

$$\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \\ \hline 3x \quad\quad = 6 \end{array} \Rightarrow x = \frac{6}{3}$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$2 + y = 3$$
$$y = 3 - 2$$
$$\boxed{y = 1}$$

Luego las dos rectas se cortan en el pto. $P:(2,1)$

8.9. Distancias.

• Distancia entre dos ptos. Sean A y B dos ptos, se tiene que la distancia entre los dos ptos es igual al modulo del vector que va del pto. A al pto. B.

e.d. $d(A,B) = |\vec{AB}|$

Ejemplo. Calcula la distancia que hay entre $A:(3,-1)$ y $B:(4,5)$

$$\vec{AB} = B - A = (4,5)-(3,-1) = (4-3, 5-(-1)) = (1,6)$$

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{1^2+6^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

· Distancia entre un pto. y una recta.

Sea $P:(x_1,y_1)$ un pto y $r: Ax+By+C=0$ una recta. Se tiene que la distancia entre el pto. A y la recta r viene dada por la formula:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejemplo. Calcula la distancia entre $P:(2,1)$ y la recta $r: 3x+4y-1=0$

$$d(P,r) = \frac{|3\cdot 2+4\cdot 1-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|6+4-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{9}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}$$

• Distancia entre dos rectas. La distancia es distinta de 0 si y solo las dos rectas son paralelas. En este caso hallamos un pto. de una de las rectas y calculamos la distancia entre ese pto. y la otra recta.

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Ejemplo. Calcula la distancia que hay entre las rectas

$r: 3x + y - 5 = 0$

$s: 3x + y + 1 = 0$

Veamos primero si son paralelas

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3y + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ -3x - y = 1 \end{cases}$$

$$= 6 \Rightarrow 0 \neq 6 \text{ NO} \Rightarrow \text{paralelas.}$$

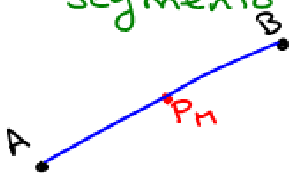
Calculamos un pto. de r.

para $x = 0 \Rightarrow 0 + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow P: (0, 5)$

luego $d(r, s) = d(P, s) = \dfrac{|3 \cdot 0 + 5 + 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{9+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{10}}$

8.10. Punto medio y mediatriz de un segmento.

• Pto. medio de un segmento. Dados los ptos. $A: (x_1, y_1)$ y $B: (x_2, y_2)$, el pto. medio del segmento AB viene dado por la formula:



$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplo. Calcula el pto. del segmento formado por los extremos $A: (3, -1)$ y $B: (5, 2)$

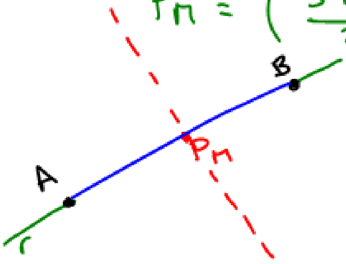
$$P_M = \left(\frac{3 + 5}{2}, \frac{-1 + 2}{2} \right) = (4, 1/2)$$

• Mediatriz de un segmento. Dados los ptos. $A: (x_1, y_1)$ y $B: (x_2, y_2)$, definimos la mediatriz del segmento AB, como la recta perpendicular al segmento que pasa por el pto. medio del segmento.

La mediatriz cumple que es el lugar geometrico de los ptos. del plano que equidistan (que tiene la misma distancia) de los extremos del segmento.

Ejemplo. Calcula la mediatriz del segmento formado por los ptos $A:(3,-1)$ y $B:(5,3)$

$$P_M = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (4,1)$$



Vamos a calcular la recta r (pasa por A y B)

$\vec{AB} = (5-3, 3+1) = (2,4) \leftarrow$ vector director de r

$\vec{n} = (-4,2)$ perpendicular a r

mediatriz: $\dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{y-1}{2}$ (recta perpendicular a $\vec{AB}$ que pasa por P_M)