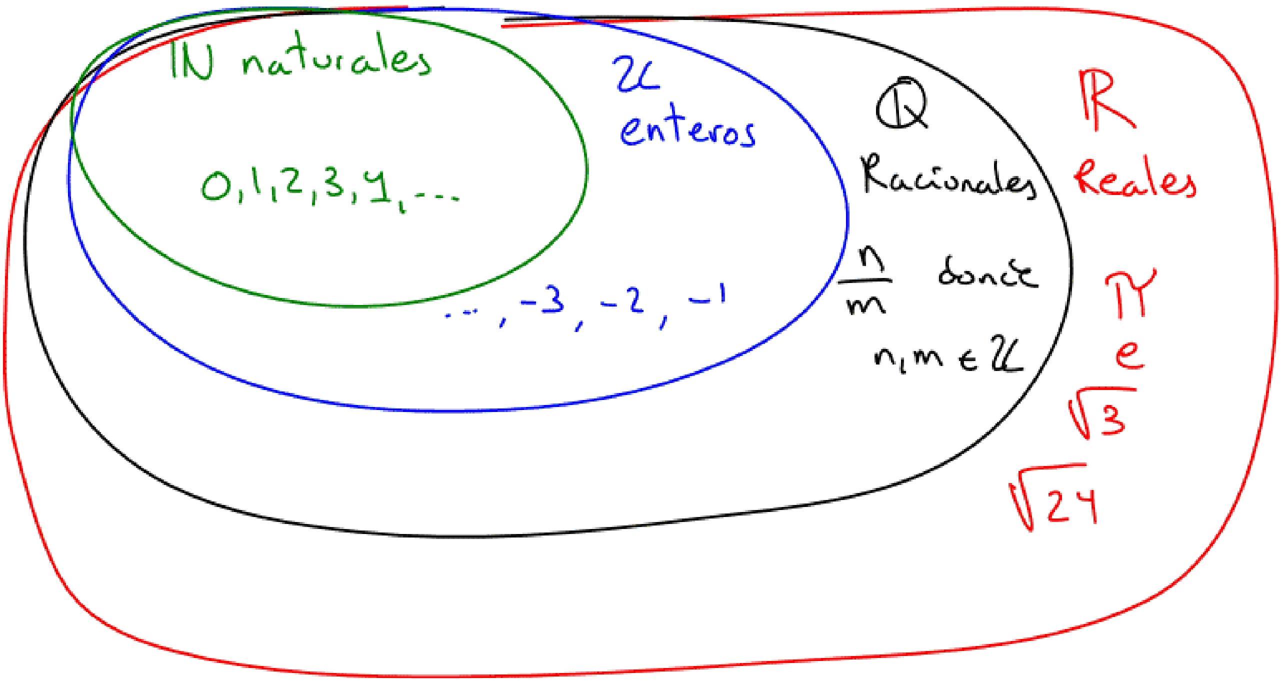
Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Tema 1. Números Reales.

1.1. Conjuntos de Números



1.2. Expresión aproximada de un numero real.

• Tabla de aproximación de nº reales.

nº comprendido entre		Valor por defecto	Valor por exceso	Error cometido menor que:
1	2	1	2	1 (unidad)
1'4	1'5	1'4	1'5	0'1 (decima)
1'41	1'42	1'41	1'42	0'01 (centesima)
1'414	1'415	1'414	1'415	0'001 (miles.)
1'4142	1'4143	1'4142	1'4143	0'0001 (diezm.)

Ejemplo: $\sqrt{2} = 1'41421356237 3...$

Colegio
EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2, 30500 Molina de Segura
Tfno 968614450. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

- Redondeo y truncamiento.

- Truncar por una cifra es simplemente considerar las cifras tal y como estan.

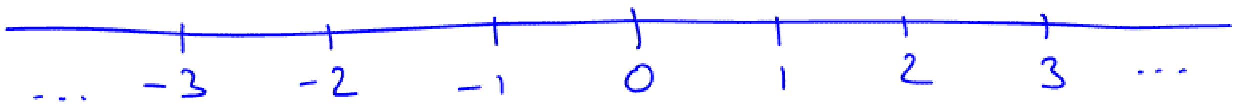
- Para redondear por una cifra, se observa la cifra siguiente:
  - Si es menor que 5 se trunca el numero
  - Si es mayor o igual que 5 se le suma uno a la ultima cifra.

Ejemplos.

Numero	Truncar por centesima	redondear por centesima	redondear por milesima
3'78351	3'78	3'78	3'784
0'01554	0'01	0'02	0'016
2'30072	2'3	2'3	2'301
5'12845	5'12	5'13	5'128

Colegio EL TALLER Centro Concertado

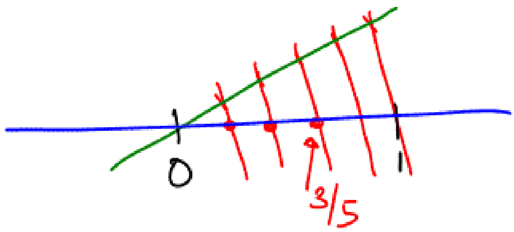
1.3. Representación de ptos. en la recta real.



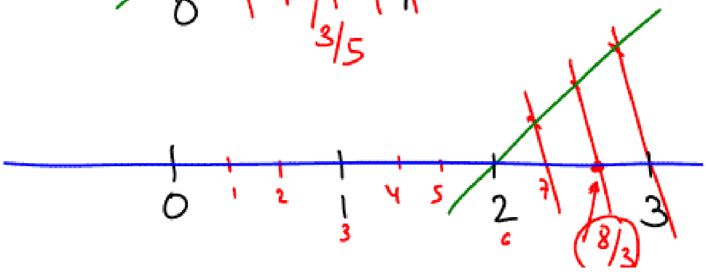
Recta Real

- Representación de los números racionales.
  A partir del teorema de tales.

$\frac{3}{5}$



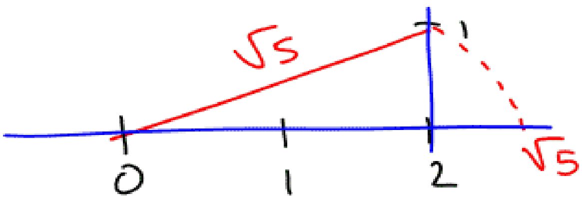
$\frac{8}{3} = 2'...$



- Representación de los números irracionales.
  A partir del teorema de pitagoras

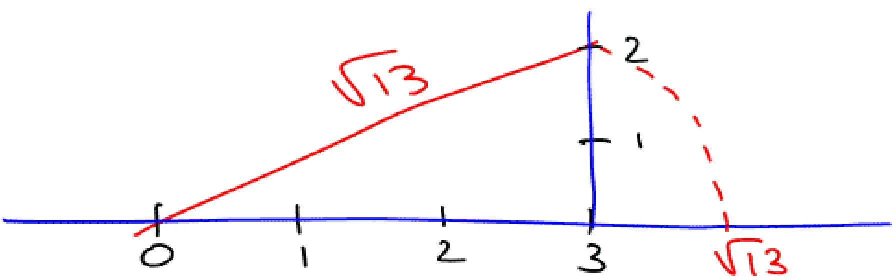
$\sqrt{5}. \longrightarrow \quad 5 = c_1^2 + c_2^2 \qquad ¿c_1, c_2?$

$5 = 2^2 + 1^2$, entonces $c_1 = 2$, $c_2 =$



$\sqrt{13} \longrightarrow \quad 13 = c_1^2 + c_2^2 \qquad ¿c_1, c_2?$

$13 = 3^2 + 2^2$, entonces $c_1 = 3$, $c_2 = 2$



1.4. Valor absoluto.

Se define el valor absoluto de un número a (se denota "$|a|$"), como el mismo número si este es positivo o cambiandole el signo si es negativo. Es decir el valor absoluto de un número es poner el número siempre positivo.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Ejemplo.

$$|5| = 5 \quad ; \quad |-3| = 3.$$

$$|5-7| = |-2| = 2$$

$$|5| - |7| = 5 - 7 = -2$$

1.5. Intervalos, semirectas y entorno de un pto.

Intervalo. Un intervalo esta determinado por dos números llamados extremos, y se define como el conjunto de números de la recta real comprendidos entre los extremos.

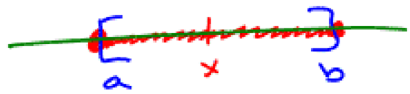
Un extremo puede ser:

- Abierto. Si el extremo no pertenece al intervalo. Se denota con un parentesis.
- Cerrado. Si el extremo pertenece al intervalo. Se denota con un corchete.

Colegio EL TALLER Centro Concertado

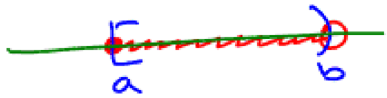
Formas de escribir un intervalo.

$x \in [a,b]$



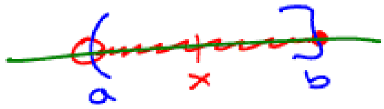
$a \leq x \leq b$

$x \in [a,b)$



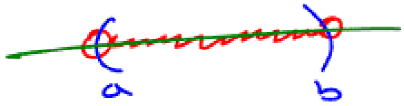
$a \leq x < b$

$x \in (a,b]$



$a < x \leq b$

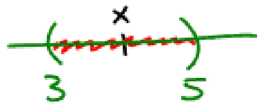
$x \in (a,b)$



$a < x < b$

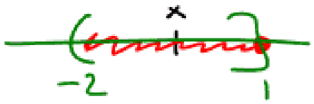
Ejemplos

$(3,5)$



$3 < x < 5$

$(-2, 1]$



$-2 < x \leq 1$

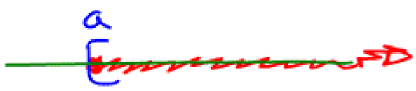
$1 \leq x < 4$

$[1,4)$

Semirrectas. Las semirrectas están determinadas por un solo extremo y se define como todos los números de la recta real menores o mayores que el extremo.

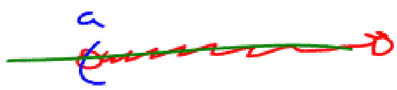
Formas de escribir la semirrecta.

$[a,\infty)$



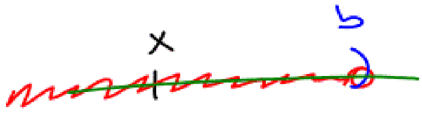
$x \geq a$

(a,∞)



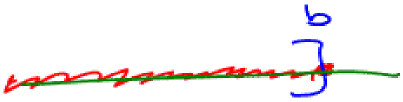
$x > a$

$(-\infty,b)$



$x < b$

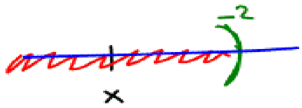
$(-\infty,b]$

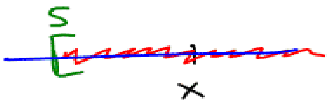


$x \leq b$

Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Ejemplos

$(-\infty, -2)$  $x < -2$

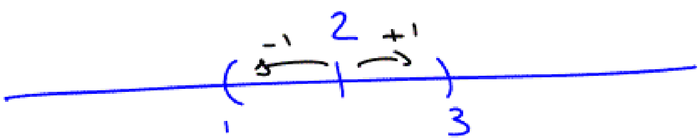
$[5, \infty)$  $x \geq 5$

El entorno de un punto.

El entorno de un pto. a radio r, es el intervalo abierto $(a-r, a+r)$.

Ejemplo. Entorno del punto 2 radio 1

$$(2-1, 2+1) = (1, 3)$$



1.6. Potencias de exponente entero. Notación científica

Propiedades de las potencias.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad 3^7 \cdot 3^4 = 3^{11}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad 3^7 : 3^4 = 3^3$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad (3^7)^4 = 3^{7 \cdot 4} = 3^{28}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad 3^{-7} = \frac{1}{3^7}$$

Ejercicios

- Opera. $(3^2 \cdot 3^7)^3 : 9$

- Simplifica $\dfrac{a^3 \cdot a^{-2} \cdot a}{a^2 \cdot a^5}$

Notacion cientifica

Un número en notación científica esta formado por:

- Una parte entera formada por una sola cifra distinta de 0.
- Una parte decimal.
- Una potencia de base 10 con exponente positivo o negativo.

Ejemplo.

$$3,17 \cdot 10^{8} = 317.000.000$$
$$1,23 \cdot 10^{-5} = 0,0000123$$

- Operaciones con notación científica.

– Sumar o restar. Para sumar o restar dos numeros en notacion cientifica debemos tener en ambos numeros el mismo exponente en la potencia del 10.

Ejemplo.

$$3,12 \cdot 10^{8} + 5,27 \cdot 10^{7} =$$
$$= 31,2 \cdot 10^{7} + 5,27 \cdot 10^{7} =$$
$$= 3647 \cdot 10^{7} = 3,647 \cdot 10^{8}.$$

– Producto y cociente. Realizamos dos operaciones por separado. Primero multiplicamos o dividimos los numeros sin la potencia. Y por otro lado multiplicamos o dividimos las potencias

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Ejemplo.

- $(3'16 \cdot 10^8) \cdot (1'2 \cdot 10^3) =$
$= (3'16 \cdot 1'2) \cdot (10^8 \cdot 10^3) =$
$= 3'792 \cdot 10^{11}.$

- $(3'16 \cdot 10^8) : (1'2 \cdot 10^3) =$
$= \dfrac{3'16 \cdot 10^8}{1'2 \cdot 10^3} = \dfrac{3'16}{1'2} \cdot \dfrac{10^8}{10^3} =$
$= 2'633 \cdot 10^5.$

1.7. Radicales.

Obtenemos la definición de raíz m-ésima de un número a, a partir de las potencias de exponente fraccionario, es decir.

$$\boxed{\sqrt[m]{a} = a^{1/m}}$$

Es más, se puede definir:

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

- a la letra m se denomina índice
- a la parte interior de la raíz se denomina radicando.

Dos radicales se dice que son equivalentes si representan el mismo número real.

Ejemplos.

$$\sqrt{5} = 5^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{2^4} = 2^{4/3}$$

$$2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$$

$$5^{-1/2} = \frac{1}{5^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$7^{-2/3} = \frac{1}{7^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

1.8. Operaciones con radicales.

- Sacar un numero fuera de la raiz.

$$\sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2}\,\sqrt{2} =$$

$$= 2^{2/2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Si el exponente de dentro es mayor que el indice, tenemos que:
"Cada vez que restamos el indice al exponente podemos sacar una base fuera"

- $\sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2}$
- $\sqrt[3]{7^8} = 7\sqrt[3]{7^5} = 7 \cdot 7 \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7^2\sqrt[3]{7^2}$
- $a^{43/6} = \sqrt[6]{a^{43}} = a^7\sqrt[6]{a}$

$$\begin{array}{r|l} 43 & 6 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

- Suma o resta de radicales.

Los radicales solo se pueden sumar o restar si tienen el mismo indice y radicando.

Ejemplo. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

$4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} =$ No se puede

Antes de realizar la suma o resta tengo que asegurarme que los radicales no son iguales sacando todos los factores posibles fuera de la raiz.

Ejemplo. $5\sqrt{12} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{27} =$

$$= 5\sqrt{3\cdot 2^2} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3^3} =$$

$$= 5\cdot 2\cdot\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\cdot 3\sqrt{3} =$$

$$= 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 23\sqrt{3}.$$

- Producto y cociente de radicales

- Si dos radicales con el mismo índice están multiplicando o dividiendo podemos dejarlos en una única raiz, multiplicando o dividiendo los radicandos.

Ejemplo.
- $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{3\cdot 2} = \sqrt{6}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{14}} = \sqrt[3]{\dfrac{7}{14}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

- Si dos radicales que están multiplicando o dividiendo tienen distinto índice, primero hay que pasarlos a expresión de potencia con exponente fraccionario y luego calcular el denominador común en los exponentes para conseguir que todos tengan el mismo índice

Ejemplos.
- $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{7} = 5^{1/2}\cdot 7^{1/3} =$

$$= 5^{\frac{3}{6}}\cdot 7^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{7^2} =$$

$$= \sqrt[6]{5^3\cdot 7^2}$$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

- $$\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{21}}{\sqrt[4]{8}}=\frac{\sqrt{2^2\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{3\cdot 7}}{\sqrt[4]{2^3}}=$$

$$=\frac{(2^2\cdot 3)^{1/2}\cdot(3\cdot 7)^{1/3}}{2^{3/4}}=\frac{(2^2\cdot 3)^{\frac{6}{12}}\cdot(3\cdot 7)^{\frac{4}{12}}}{2^{\frac{9}{12}}}$$

$$=\frac{\sqrt[12]{(2^2\cdot 3)^6}\cdot\sqrt[12]{(3\cdot 7)^4}}{\sqrt[12]{2^9}}=\frac{\sqrt[12]{2^{12}\cdot 3^6}\cdot\sqrt[12]{3^4\cdot 7^4}}{\sqrt[12]{2^9}}=$$

$$=\sqrt[12]{\frac{2^{12}\cdot 3^6\cdot 3^4\cdot 7^4}{2^9}}=\sqrt[12]{2^3\cdot 3^{10}\cdot 7^4}$$

1.9. Racionalización

Se utiliza para eliminar un radical en el denominador de una fracción.

- Si en el denominador solo hay un radical. Se multiplica y divide la fracción por otro radical con el mismo numero tal que elimine el radical del denominador.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{3}}}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

- Si en el denominador aparece la suma o resta de uno o dos radicales, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador, que es el mismo denominador pero cambiado de signo el segundo miembro.

$$\frac{3-\sqrt{2}}{5+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{2})(5-\sqrt{3})}{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})} = \frac{15-3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{5^2-(\cancel{\sqrt{}}3)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{15-3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+\sqrt{6}}{25-3} = \frac{15-3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+\sqrt{6}}{22}$$

1.10 Logaritmo de un número.

Sea a un número positivo y distinto de $\underline{1}$.

Se define el logaritmo en base a de un numero b $(\log_a b)$ como el exponente al que hay que elevar la base a para obtener el número b.

e.d. $\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$

Ejemplos

$\log_2 8 = x \Rightarrow 2^x = 8$

$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$\log_x 9 = 2 \Rightarrow x^2 = 9$

$x^2 = 3^2 \Rightarrow x = 3$

$\log x = 3 \Rightarrow 10^3 = x \Rightarrow x = 1000$

1.11 Propiedades de los logaritmos

- $\log_a \underline{1} = 0$ Para cualquier base a
- $\log_a a = \underline{1}$ Para cualquier base a
- $\log_a 0$ No existe, Para cualquier a.

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$
- $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
- Cambio de base. $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

1.12. Expresión logarítmica.

Una expresión logarítmica es una colección de letras y numeros unidos por las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Además de tener partes con logaritmos.

Por ejemplo.

$$3 \log x^2 - 7 \log y = x^2 \cdot z.$$

es una expr. logaritm.

e.d. es una expresión algebraica pero con logaritmos.

* Como pasar de expresion logaritmica a expresion algebraica.

Utilizamos las propiedades de los logaritmos para dejar un único logaritmo en cada una de las igualdades, Tachamos los logaritmos quedando una expresion algebraica.

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Ejemplo.

- $3\log x^2 - \log y = 4\log z$

$$\log (x^2)^3 - \log y = \log z^4$$

$$\cancel{\log} \frac{x^6}{y} = \cancel{\log} z^4$$

$$\frac{x^6}{y} = z^4$$

- $3\log x + 2\log 7y = 1$

$$\log x^3 + \log (7y)^2 = \log 10$$

$$\cancel{\log} x^3 \cdot 7^2 \cdot y^2 = \cancel{\log} 10$$

$$49 x^3 y^2 = 10$$