Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614450. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Tema 2. Polinomios.

2.1. Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación de letras y números relacionados entre sí por las operaciones de la suma, resta, multiplicacion y división.

El valor numérico de una expresión algebraica es el valor que se obtiene al sustituir en ella las letras por valores concretos y realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo.
- $3x^2 - 7y + 3$ es una expresion algeb.
- Calcula el valor numerico de la expresion algebraica $3x^2 - 7y + 3$ para $x = -1$, $y = 5$

$$3 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (5) + 3 = 3 \cdot 1 - 35 + 3 =$$
$$= 3 - 35 + 3 = -29$$

2.2. Monomios.

Un monomio es la multiplicación de un numero por letras.

Ejemplo. $3 \cdot x^2 \cdot y$ es un monomio.

El grado de un monomio es la suma de los exponentes de las letras (si no tiene exponente se considera que esta elevado a 1).

Ejemplo $3x^2y$ tiene grado 3.

Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Dos monomios se dice que son semejantes si tienen la misma parte literal (e.d. si tienen las mismas letras y exponentes).

Ejemplo $5x^2y$, $-2x^2y$ son semejantes.
$4x^2y$, $5xy$ no son semejantes.

· Operaciones con monomios.

Suma y resta de monomios. Dos monomios se pueden sumar o restar solo si son semejantes. (e.d. si tienen la misma parte literal).

Ejemplo. $3x^2y - 5x^2y = -2x^2y$.

$5xy + 3x^2y$ No se pueden sumar y se deja como esta.

Producto y cociente de monomios. Para multiplicar o dividir dos o mas monomios, multiplicamos la parte entera por un lado, y otro lado la parte literal (sumando los exponentes que tengan la misma base)

Ejemplo. $(3 \cdot x^2 \cdot y) \cdot (5 \cdot x \cdot y^3) = 15x^3y^4$

$$\frac{15x^2y^3}{5xy^2} = 3xy$$

2.3. Polinomios enteros en una variable

Un polinomio entero en una variable es la suma o resta de dos o más monomios que tienen por coeficiente un número entero y por parte literal una única letra idéntica en todos los monomios (llamada variable).

Ejemplo.

- $3x^2 - 5x + 7$ es un polinomio entero en una variable (x)

Se denomina término de un polinomio a cada uno de los monomios.

El grado de un polinomio es el mayor grado de sus monomios.

Un polinomio siempre se debe escribir ordenado de mayor a menor grado de sus monomios.

Se llama coeficiente principal al coeficiente del término de mayor grado.

Se llama término independiente al término que no lleva multiplicando la variable.

Ejemplo.

$$3x^3 - 5x + 7x^2 - 3 =$$

$$= 3x^{\overset{\text{grado del polinomio}}{3}} + 7x^2 - 5x - 3$$

Coeficiente principal. términos término independiente

Colegio EL TALLER Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614450. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

2.4. Operaciones con polinomios

La suma o resta de dos polinomios es otro polinomio que esta formado por la suma o diferencia de los monomios semejantes unidos a la suma o diferencia de los terminos no semejantes.

Ejemplo.

- $(3x^2 - 5x + 8) + (3x - 7) =$
  $= 3x^2 - 5x + 8 + 3x - 7 =$
  $= 3x^2 - 2x + 1$

- $(5x - 7) - (8x^3 - 5x^2 + 7x - 3) =$
  $= 5x - 7 - 8x^3 + 5x^2 - 7x + 3 =$
  $= -8x^3 + 5x^2 - 2x - 4.$

El producto de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos terminos se obtienen multiplicando cada término del primero por cada término del segundo, y reduciendo luego los términos semejantes.

Ejemplo. $(3x^2 - 5x - 7) \cdot (2x - 7) =$

$= 6x^3 - 21x^2 - 10x^2 + 35x - 14x + 49 =$

$= 6x^3 - 31x^2 + 21x + 49$

2.5. Identidades notables.

Binomio al cuadrado.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2a\cdot b + b^2$$

Suma por diferencia

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos.

- $(2x-7)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 7 + 7^2 =$
  $= 4x^2 - 28x + 49$
- $(5x^2+3x)^2 = (5x^2)^2 + 2\cdot 5x^2\, 3x + (3x)^2 =$
  $= 25x^4 + 30x^3 + 9x^2$
- $(5x^2-7)\cdot(5x^2+7) = (5x^2)^2 - 7^2 =$
  $= 25x^4 - 49$

2.6. Division de polinomios.

Veamos un ejemplo. $(2x^5+7x^4+x^2-4x+1):(x^2+3x-2)$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & +7x^4 & & +x^2 & -4x & +1 & x^2+3x-2 \\ \hline
-2x^5 & -6x^4 & +4x^3 & & & & 2x^3+x^2+x \\ \hline
\cancel{\ } & x^4 & +4x^3 & +x^2 & & & \\
 & -x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & \\ \hline
 & \cancel{\ } & x^3 & +3x^2 & -4x & & \\
 & & -x^3 & -3x^2 & +2x & & \\ \hline
 & & \cancel{\ } & \cancel{\ } & -2x & +1 &
\end{array}
$$

- División por Ruffini

Se utiliza cuando el divisor es del tipo $(x-a)$

Veamos un ejemplo.

$$(x^3-3x^2+5x-10):(x-3)$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 5 & -10 \\ 3 & & 3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & \boxed{5} \end{array}$$

Cociente
x^2+5

Resto.
5

2.7. Teoremas del Resto y del factor.

Teorema del Resto. El resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x-a)$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x=a$.

e.d. $\quad R = P(a).$

Ejemplo. Calcula el resto de dividir

$P(x) = 3x^3-7x^2-5x+8$ entre $(x+1)$

Sin hacer la división por Ruffini.

$$\text{Resto} = P(-1) = 3(-1)^3-7(-1)^2-5(-1)+8 =$$
$$= -3-7+5+8 = 3$$

Comprobamos por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -7 & -5 & 8 \\ -1 & & -3 & 10 & -5 \\ \hline & 3 & -10 & 5 & \boxed{3} \end{array}$$

$\rightarrow$ tiene resto 3

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Definción. Sea $P(x)$ un polinomio, se denominan raices del polinomio a las soluciones de la ecuacion $P(x)=0$.
e.d. a es raiz de $P(x)$ si $P(a)=0$

Teorema fundamental del algebra. Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raices.

Definción. Sea $P(x)$ un polinomio, se dice que $(x-a)$ es factor de $P(x)$ si la division $P(x)$ entre $(x-a)$ es exacta (tiene resto 0).

Propiedad. Las raices enteras de un polinomio dividen al término independiente del polinomio.

Teorema del factor. Sea $P(x)$ un polinomio y "a" un numero entero. Si se cumple una de las siguientes afirmaciones, se cumplen todas las demas.

a) $x=a$ es raiz de $P(x)$.
b) $P(a)=0$.
c) $P(x)$ dividido entre $(x-a)$ tiene resto 0.
d) $(x-a)$ es factor.

Ejemplo. Calcula el valor de m para que el polinomio $P(x)=3x^3-7x^2+mx-5$ tenga como factor $(x+1)$.

$(x+1)$ factor $\Rightarrow P(-1)=0$

$$0=P(-1)=3(-1)^3-7(-1)^2+m(-1)-5$$
$$0=3(-1)-7\cdot 1-m-5$$
$$0=-3-7-m-5$$
$$0=-15-m$$
$$m=-15$$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

2.8. Factorización de un polinomio.

La factorización de un polinomio es el producto de todos los factores que tiene el polinomio.

Para encontrar los factores hacemos ruffini al polinomio hasta conseguir una raíz del polinomio (e.d. tenga resto 0). Aplicando el teorema del factor obtenemos un factor del polinomio.

Seguimos haciendo ruffini al cociente de la división anterior. Hasta conseguir que el cociente sea de grado 0.

Observación. Si el coeficiente principal es distinto de 1, este numero debe aparecer multiplicando junto con los factores. Este numero tambien aparece al lado del resto en el ultimo ruffini.

Ejemplo.

Factoriza $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -1 & -3 \\
-1 & & -1 & -2 & 3 \\
\hline
 & 1 & 2 & -3 & \boxed{0}
\end{array}
\Rightarrow
\left\{\begin{array}{l}
x=-1 \text{ es raíz} \\
P(-1)=0 \\
P(x):(x+1) \text{ da resto } 0 \\
(x+1) \text{ es factor}
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 2 & -3 \\
1 & & 1 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0}
\end{array}
\Rightarrow
\left\{\begin{array}{l}
x=1 \text{ es raíz} \\
P(1)=0 \\
P(x):(x-1) \text{ da resto } 0 \\
(x-1) \text{ es factor}
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|rr}
 & 1 & 3 \\
-3 & & -3 \\
\hline
 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
\Rightarrow
\left\{\begin{array}{l}
x=-3 \text{ es raíz} \\
P(-3)=0 \\
P(x):(x+3) \text{ da resto } 0 \\
(x+3) \text{ es factor}
\end{array}\right.$$

Factorización: $P(x) = (x+1)(x-1)(x+3)$

Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

2.9. Polinomios irreducibles.

Un polinomio se dice que es irreducible si no se puede descomponer como producto de factores.

Todos los polinomios irreducibles tienen grado 1 ó grado 2.

Ejemplo.

$x^2 + 1$ es irreducible.

$$\left(\begin{array}{l} x^2+1=0 \\ x^2=-1 \\ \cancel{x=\pm\sqrt{-1}} \text{ NO.} \end{array} \right)$$