Tema 6. Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones

6.1. Definición de ecuación.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

P.e. $e = m \cdot c^2$. es una ecuación.

$3x + 5 = 2x - 1$ es una ecuación.

Las soluciones de las ecuaciones son los valores que pueden tomar las incognitas (letras), tales que al sustituirlos en la ecuacion se cumple la igualdad.

P.e. $x = 5$ es solución de $3x - 2 = x + 8$

ya que $3 \cdot 5 - 2 = 5 + 8$

$13 = 13$ OK.

Resolver una ecuación, es encontrar las soluciones

6.2. Ecuaciones de primer y segundo grado.

Veamos varios ejemplos de ecuaciones de primer grado.

$$3x - 7 = 5x + 2$$
$$3x - 5x = 2 + 7$$
$$-2x = 9$$
$$x = \frac{9}{-2}$$

$$5(-x + 8) + 3 = 4(2x - 1)$$
$$-5x + 40 + 3 = 8x - 4$$
$$-5x - 8x = -4 - 40 - 3$$
$$-13x = -47$$
$$x = \frac{-47}{-13} = \frac{47}{13}$$

$$\frac{2x - 5}{4} - \frac{3x + 1}{3} = \frac{x}{6} + 2$$
$$\frac{3(2x - 5)}{\cancel{12}} - \frac{4(3x + 1)}{\cancel{12}} = \frac{2x}{\cancel{12}} + \frac{24}{\cancel{12}}$$
$$3(2x - 5) - 4(3x + 1) = 2x + 24$$
$$6x - 15 - 12x - 4 = 2x + 24$$
$$6x - 12x - 2x = 24 + 15 + 4$$
$$-8x = 43 \Rightarrow x = 43/-8$$

Colegio EL TALLER Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2, 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

- Ecuaciones de segundo grado

Son del tipo $ax^2+bx+c=0$, con a,b,c numeros.

Se resuelve a partir de la formula.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}$$, dando 2 posibles soluciones

Ejemplo. $x^2-5x+6=0.$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

- Ecuaciones de 2 grado incompletas.

- Si falta el termino de grado 1 $(b=0)$.

Se despeja x^2 como si fuera una ecuación de primer grado. Para dejar sola a x pasamos el cuadrado como $\pm\sqrt{\ }$. Obteniendo así dos soluciones.

Ejemplo. $3x^2-75=0 \rightarrow 3x^2=75$

$$x^2 = \frac{75}{3}$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$\boxed{x = \pm 5}$$

- Si falta el termino independiente ($c=0$).
  Se saca factor común una x (ya que todos los terminos la tienen). Quedando dos partes multiplicadas igual a 0, siendo una de esas partes la x que hemos sacado factor común. En este punto ó bien $x=0$ (una solución) ó la otra parte es igual a cero. Esto genera una ecuacion de primer grado que resolvemos.

Ejemplo $3x^2-75x=0$

$$x\cdot(3x-75)=0 \quad \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 3x-75=0 \\ 3x=75 \\ x=\dfrac{75}{3} \\ \boxed{x=25} \end{cases}$$

6.3. Resolución de otros tipos de ecuaciones.

- Ecuaciones bicuadradas. Son ecuaciones del tipo $ax^4+bx^2+c=0$. y se resuelven haciendo el cambio de variable $z=x^2$.
  Quedando, así, una ecuación de 2º grado que resolvemos.
  Una vez calculada las soluciones de z, deshacemos el cambio para encontrar las soluciones de x.

Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Ejemplo. $x^4+3x^2-4=0$

Hacemos el cambio $z=x^2$

$$z^2+3z-4=0$$

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=$$

$$z=\frac{-3\pm5}{2}=\begin{cases}\frac{-8}{2}=-4\\[4pt]\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

Deshacemos el cambio

$z=-4$	$z=1$
$x^2=-4$	$x^2=1$
~~$x=\pm\sqrt{-4}$~~ NO tiene sol. reales	$x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\boxed{x=\pm1}$

- Ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2.
  - Si le falta el término independiente se resuelve sacando factor común, reduciendo la ecuación en un grado.

Ejemplos. $2x^3-8x=0$

$$x(2x^2-8)=0\ \begin{cases}x=0\\ 2x^2-8=0\end{cases}$$

$$2x^2=8$$

$$x^2=8/2$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm\sqrt{4}$$

$$x=\pm2$$

- Si tiene el término independiente la mejor forma es factorizar el polinomio calculando todas sus raíces que coinciden con las soluciones de la ecuación

· Resuelve $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -5 & 2 & 8 \\
-1 & & -1 & 6 & -8 \\
\hline
 & 1 & -6 & 8 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -8 & \\
\hline
 & 1 & -4 & \boxed{0} & \\
4 & & 4 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ $x = -1$ es raíz; $(x+1)$ es factor

$\Rightarrow$ $x = 2$ es raíz; $(x-2)$ es factor

$\Rightarrow$ $x = 4$ es raíz; $(x-4)$ es factor

Soluciones. $x = -1$, $x = 2$, $x = 4$

- Ecuaciones radicales

Una ecuación radical es aquella donde aparece una incógnita en el radicando de una raíz.

Para poder resolver se deja sola la raíz a un lado de la igualdad. Después se eleva al cuadrado los dos miembros de la igualdad. Consiguiendo eliminar la raíz cuadrada. De esta forma nos queda una ecuación que resolvemos.

Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado podemos obtener soluciones falsas, luego al final hay que comprobar todas las soluciones.

Ejemplo. Resuelve $\sqrt{x+4}+2=x$

$$\sqrt{x+4}=x-2$$
$$(\cancel{\sqrt{x+4}})^{\cancel{2}}=(x-2)^2$$
$$x+4=x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2$$
$$x+4=x^2-4x+4$$
$$x+4-x^2+4x-4=0$$
$$-x^2+5x=0$$
$$x(-x+5)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ -x+5=0 \\ -x=-5 \\ x=5 \end{cases}$$

Comprobacion.

$x=0$

$$\sqrt{0+4}+2=0$$
$$\sqrt{4}+2=0$$
$$2+2=0$$
$$4\neq 0 \quad \text{NO}$$

$x=5$

$$\sqrt{5+4}+2=5$$
$$\sqrt{9}+2=5$$
$$3+2=5$$
$$5=5 \quad \text{OK} \Rightarrow$$

$x=5$ es solución

6.4. Sistemas de ecuaciones lineales.

- Métodos de resolución.

Por sustitución. Despejamos una incognita (buscamos la que este sola) y sustituimos en la otra ecuación.

$$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ x-y=3 \end{cases} \longrightarrow x=3+y$$

$$2(3+y)+3y=-4$$
$$6+2y+3y=-4$$
$$5y=-4-6$$
$$5y=-10$$
$$y=-10/5$$
$$\boxed{y=-2}$$

$$x=3-2$$
$$\boxed{x=1}$$

$$\boxed{\text{Solución} \quad x=1,\; y=-2}$$

Por igualación. Despejamos la misma incognita en las dos ecuaciones e igualamos lo despejado.

$$\begin{cases} 2x+3y=-4 \Rightarrow 2x=-4-3y \Rightarrow x=\dfrac{-4-3y}{2} \\ x-y=3 \Rightarrow x=3+y \end{cases}$$

$$\frac{-4-3y}{2}=3+y$$

$$-4-3y=2(3+y)$$

$$-4-3y=6+2y$$

$$-3y-2y=6+4$$

$$-5y=10$$

$$y=10/-5$$

$$\boxed{y=-2}$$

$$x=3-2$$

$$\boxed{x=1}$$

Solución $x=1$
$y=-2$

Por reducción. La intención es conseguir el mismo número de una de las incognitas en las dos ecuaciones. Para ello multiplicamos todos los términos de cada ecuación por un número.

$$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ x-y=3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2x+3y&=-4 \\ \xrightarrow{\times(-2)} \quad -2x+2y&=-6 \\ \hline 5y&=-10 \Rightarrow y=\frac{-10}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{y=-2}$$

$$x-(-2)=3$$

$$x+2=3$$

$$x=3-2$$

$$\boxed{x=1}$$

Solución $x=1$
$y=-2$

Colegio EL TALLER Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Observación. En los sistemas de ecuaciones lineales, cada ecuacion representa una recta.
La solución del sistema de ecuaciones, si existe, es el pto. de intersección de ambas rectas.

Al intentar resolver un sistema de ecuaciones puede pasar:

- Exista una unica solucion para x e y.
  Se denomina sistema compatible determinado.
- Que existan infinitas soluciones. Se da cuando al intentar resolver la ecuacion se obtiene
  $k = k$, donde k es cualquier número.
  Se denomina sistema compatible indeterminado.
- Que no exista solución. Se da cuando al intentar resolver la ecuacion se obtiene
  $k = 0$, donde k es cualquier número $\neq 0$
  Se denomina sistema incompatible.