Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614450. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Tema 3. Ecuaciones y Sistemas.

3.1. Ecuaciones de primer y segundo grado.

Veamos varios ejemplos de ecuaciones de primer grado.

$$3x - 7 = 5x + 2$$
$$3x - 5x = 2 + 7$$
$$-2x = 9$$
$$x = \frac{9}{-2}$$

$$5(-x+8)+3 = 4(2x-1)$$
$$-5x+40+3 = 8x-4$$
$$-5x-8x = -4-40-3$$
$$-13x = -47$$
$$x = \frac{-47}{-13} = \frac{47}{13}$$

$$\frac{2x-5}{4} - \frac{3x+1}{3} = \frac{x}{6} + 2$$
$$\frac{3(2x-5)}{\cancel{12}} - \frac{4(3x+1)}{\cancel{12}} = \frac{2x}{\cancel{12}} + \frac{24}{\cancel{12}}$$
$$3(2x-5) - 4(3x+1) = 2x + 24$$
$$6x - 15 - 12x - 4 = 2x + 24$$
$$6x - 12x - 2x = 24 + 15 + 4$$
$$-8x = 43 \Rightarrow x = 43/-8$$

· Ecuaciones de segundo grado

Son del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, c números.

Se resuelve a partir de la formula.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$, dando 2 posibles soluciones

Ejemplo. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} =$$
$$= \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

- Ecuaciones de 2 grado incompletas.

  - Si falta el termino de grado 1 ($b=0$).
    Se despeja x^2 como si fuera una ecuación de primer grado. Para dejar sola a x pasamos el cuadrado como $\pm\sqrt{\ }$. Obteniendo así dos soluciones.

Ejemplo. $3x^2-75=0 \rightarrow 3x^2=75$

$$x^2=\frac{75}{3}$$

$$x^2=25$$

$$x=\pm\sqrt{25}$$

$$\boxed{x=\pm 5}$$

  - Si falta el termino independiente ($c=0$).
    Se saca factor común una x (ya que todos los terminos la tienen). Quedando dos partes multiplicadas igual a 0, siendo una de esas partes la x que hemos sacado factor común. En este punto ó bien $x=0$ (una solución) ó la otra parte es igual a cero. Esto genera una ecuacion de primer grado que resolvemos.

Ejemplo $3x^2-75x=0$

$$x\cdot(3x-75)=0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$3x-75=0$$

$$3x=75$$

$$x=\frac{75}{3}$$

$$\boxed{x=25}$$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614450. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

3.2. Resolución de otros tipos de ecuaciones.

- **Ecuaciones bicuadradas.** Son ecuaciones del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$. y se resuelven haciendo el cambio de variable $z = x^2$.

  Quedando, así, una ecuación de 2º grado que resolvemos.

  Una vez calculada las soluciones de z, deshacemos el cambio para encontrar las soluciones de x.

Ejemplo. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

Hacemos el cambio $z = x^2$

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$$z = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-8}{2} = -4 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio

$z = -4$

$x^2 = -4$

$\cancel{x = \pm\sqrt{-4}}$ NO tiene sol. reales

$z = 1$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$

- **Ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2.**
  - Si le falta el término independiente se resuelve sacando factor común, reduciendo la ecuación en un grado.

Ejemplos.

$$2x^3 - 8x = 0$$
$$x(2x^2 - 8) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = 8/2$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

- Si tiene el término independiente la mejor forma es factorizar el polinomio calculando todas sus raices que coinciden con las soluciones de la ecuación

· Resuelve $\quad x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ -1 & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ es raiz} \\ (x+1) \text{ es factor} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & 8 \\ 2 & & 2 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ es raiz} \\ (x-2) \text{ es factor} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & -4 \\ 4 & & 4 \\ \hline & 1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ es raiz} \\ (x-4) \text{ es factor} \end{cases}$$

Soluciones. $\quad x = -1,\ x = 2,\ x = 4$

Colegio
EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

• Ecuaciones radicales

Una ecuación radical es aquella donde aparece una incognita en el radicando de una raiz.

Para poder resolver se deja sola la raiz a un lado de la igualdad. Despues se eleva al cuadrado los dos miembros de la igualdad. Consiguiendo eliminar la raiz cuadrada. De esta forma nos queda una ecuación que resolvemos.

Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado podemos obtener soluciones falsas, luego al final hay que comprobar todas las soluciones.

Ejemplo. Resuelve $\sqrt{x+4} + 2 = x$

$$\sqrt{x+4} = x-2$$
$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (x-2)^2$$
$$x+4 = x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2$$
$$x+4 = x^2 - 4x + 4$$
$$x+4 - x^2 + 4x - 4 = 0$$
$$-x^2 + 5x = 0$$
$$x(-x+5) = 0$$

$x = 0$

$-x+5=0$
$-x = -5$
$x = 5$

Comprobacion.

$x=0$

$$\sqrt{0+4} + 2 = 0$$
$$\sqrt{4} + 2 = 0$$
$$2 + 2 = 0$$
$$4 \neq 0$$

NO

$x=5$

$$\sqrt{5+4} + 2 = 5$$
$$\sqrt{9} + 2 = 5$$
$$3 + 2 = 5$$
$$5 = 5$$

OK $\Rightarrow$ $x=5$ es solución

3.3. Ecuaciones logarítmicas.

Son ecuaciones donde aparecen logaritmos. Para resolverla pasamos la expresión logarítmica a expresión algebraica. Quedando una ecuación que resolvemos.

Ejemplo. $\log x^3 - \log x = \log(2x+3)$

$$\cancel{\log} \frac{x^3}{x} = \cancel{\log}(2x+3)$$

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-2}{2} = \cancel{-1} \end{cases}$$

NO ya que $\log -1$ no existe

3.4. Ecuaciones exponenciales.

Son ecuaciones donde la incognita aparece en el exponente. Veamos varios tipos.

- Directas. Simplemente tenemos que descomponer los numeros e igualar partes de la ecuación.

$$3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$$

- Tomar logaritmos para resolverlas.

Son de un tipo parecido al anterior pero no se consigue igualar las bases.

$$3^x = 17$$

$$\log 3^x = \log 17$$

$$x \log 3 = \log 17$$

$$\boxed{x = \frac{\log 17}{\log 3}}$$

(se resuelve con calculadora)

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

• Cambio de variable para resolver la ecuación

Veamoslo con un ejemplo. $3^{x+1} + 3^{x} + 3^{x-1} = 39$

Se ve claramente que no es del tipo anterior.

Hacemos el cambio $u = 3^{x}$.

observamos que

$$3^{x+1} = 3^{x} \cdot 3 = u \cdot 3$$

$$3^{x-1} = 3^{x} \cdot 3^{-1} = u \cdot 3^{-1} = u \cdot \frac{1}{3} = \frac{u}{3}$$

luego la ecuación queda.

$$3u + u + \frac{u}{3} = 39 \qquad \text{(ecuación de 1er grado)}$$

$$4u + \frac{u}{3} = 39$$

$$\frac{12u}{\cancel{3}} + \frac{u}{\cancel{3}} = \frac{117}{\cancel{3}}$$

$$13u = 117$$

$$u = \frac{117}{13} = 9$$

Deshacemos el cambio

$$u = 9$$

$$3^{x} = 9 \Rightarrow 3^{x} = 3^{2} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2, 30500 Molina de Segura
Tfno 968614450. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Ejemplo. $2^{2x} - 2^{x+1} = 8$

hacemos el cambio $u = 2^x$

observamos que $2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = u \cdot 2$

$2^{2x} = (2^x)^2 = u^2$

Luego $u^2 - 2u = 8$

$u^2 - 2u - 8 = 0$

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio

$u = 4$

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$\boxed{x = 2}$

$u = -2$

$\cancel{2^x = -2}$ NO. (una potencia no puede dar un numero negativo)

3.5. Sistemas de ecuaciones lineales.

- Métodos de resolución.

por sustitución. Despejamos una incognita (buscamos la que este sola) y sustituimos en la otra ecuación.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ x - y = 3 \end{cases} \longrightarrow x = 3 + y$$

$2(3+y) + 3y = -4$

$6 + 2y + 3y = -4$

$5y = -4 - 6$

$5y = -10$

$y = -10/5$

$\boxed{y = -2}$

$x = 3 - 2$

$\boxed{x = 1}$

Solución $x = 1$
$y = -2$

Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Por igualación. Despejamos la misma incognita en las dos ecuaciones e igualamos lo despejado.

$$\begin{cases} 2x+3y=-4 \Rightarrow 2x=-4-3y \Rightarrow x=\dfrac{-4-3y}{2} \\ x-y=3 \Rightarrow x=3+y \end{cases}$$

$$\frac{-4-3y}{2}=3+y$$

$$-4-3y=2(3+y)$$

$$-4-3y=6+2y$$

$$-3y-2y=6+4$$

$$-5y=10$$

$$y=10/-5$$

$$\boxed{y=-2}$$

$$x=3-2$$

$$\boxed{x=1}$$

Solución $x=1$, $y=-2$

Por reducción. La intención es conseguir el mismo número de una de las incognitas en las dos ecuaciones. Para ello multiplicamos todos los términos de cada ecuación por un número.

$$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ x-y=3 \end{cases} \xrightarrow{x(-2)} \begin{array}{r} 2x+3y=-4 \\ -2x+2y=-6 \\ \hline 5y=-10 \end{array} \Rightarrow y=\frac{-10}{5}$$

$$\boxed{y=-2}$$

$$x-(-2)=3$$

$$x+2=3$$

$$x=3-2$$

$$\boxed{x=1}$$

Solución $x=1$, $y=-2$

Colegio
EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Observación. En los sistemas de ecuaciones lineales, cada ecuacion representa una recta.
La solución del sistema de ecuaciones, si existe, es el pto. de intersección de ambas rectas.

Al intentar resolver un sistema de ecuaciones puede pasar:

- Exista una unica solucion para x e y.
  Se denomina sistema compatible determinado.
- Que existan infinitas soluciones. Se da cuando al intentar resolver la ecuacion se obtiene
  $k = k$, donde k es cualquier número.
  Se denomina sistema compatible indeterminado.
- Que no exista solución. Se da cuando al intentar resolver la ecuacion se obtiene
  $k = 0$, donde k es cualquier número $\neq 0$
  Se denomina sistema incompatible.

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

3.6. Sistemas de ecuaciones no lineales.

Son aquellos en los que alguna de sus ecuaciones no es de primer grado.

- Sistemas de ecuaciones de 2° grado.

  Se suele utilizar el método de sustitución.

$$\begin{cases} x+y=14 \\ x^2+y^2=100 \end{cases} \longrightarrow x = 14-y$$

$$(14-y)^2+y^2=100$$
$$14^2-2\cdot 14\cdot y+y^2+y^2=100$$
$$196-28y+2y^2-100=0$$
$$2y^2-28y+96=0$$
$$y^2-14y+48=0.$$

$$y=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot 1\cdot 48}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{196-192}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{14\pm 2}{2}=\begin{cases}8\\6\end{cases}$$

Si $y=8 \Rightarrow x=14-8 \Rightarrow x=6$

Si $y=6 \Rightarrow x=14-6 \Rightarrow x=8$

- Sistemas de ecuaciones logarítmicos.

  Lo más habitual es eliminar los logaritmos dejando una expresión algebraica.

$$\begin{cases} \log x+6\log y=7 \\ \log x+\log y=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x+\log y^6=\log 10^7 \\ \log x\cdot y=\log 10^{-3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\log}\, x\cdot y^6=\cancel{\log}\, 10^7 \\ \cancel{\log}\, x\cdot y=\cancel{\log}\,\frac{1}{10^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot y^6=10^7 \\ x\cdot y=\frac{1}{10^3} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{10^3\cdot y}$$

$$\frac{1}{10^3\cdot y}\cdot y^6=10^7 \Rightarrow \frac{y^6}{10^3\cdot y}=10^7 \Rightarrow \frac{y^5}{10^3}=10^7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^5=10^7\cdot 10^3 \Rightarrow y^5=10^{10} \Rightarrow y=\sqrt[5]{10^{10}}$$

$$\Rightarrow y=10^2 \qquad x=\frac{1}{10^3\cdot 10^2}=\frac{1}{10^5} \Rightarrow x=10^{-5}$$