Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Tema 6. Trigonometría.

6.1. Medida de ángulos.

Si cogemos una circunferencia y la dividimos en 360 partes iguales. Cada una de esas partes es un grado. Un grado se divide en 60 minutos y un minuto en 60 segundos.

e.d. 1 vuelta $= 360^\circ$
$1^\circ = 60'$
$1' = 60''$.

Los radianes son otra forma de medir angulos.

1 vuelta $= 2\pi$ Radianes.

(la amplitud del angulo se mide con la longitud del arco que se genera con dicho angulo en una circunferencia de radio 1).

• Como pasar de grados a radianes.

Se obtiene con una regla de tres y simplificando al maximo la fraccion resultante (sin tocar el numero π).

Ejemplo. ¿Cuantos radianes son 60°?

360° ——— 2π Rad.
60° ——— x Rad

$$x = \frac{60 \cdot 2\pi}{360} = \frac{12\cancel{0}\pi}{36\cancel{0}} = \frac{6\pi}{18} = \frac{3\pi}{9} =$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ Rad.}$$

- Como pasar de radianes a grados.

Se obtiene con una regla de tres, simplificando la fracción resultante

Ejemplo. ¿Cuantos grados son $\frac{3\pi}{2}$ Rad?

$$360° \text{ ——— } 2\pi \text{ Rad}$$

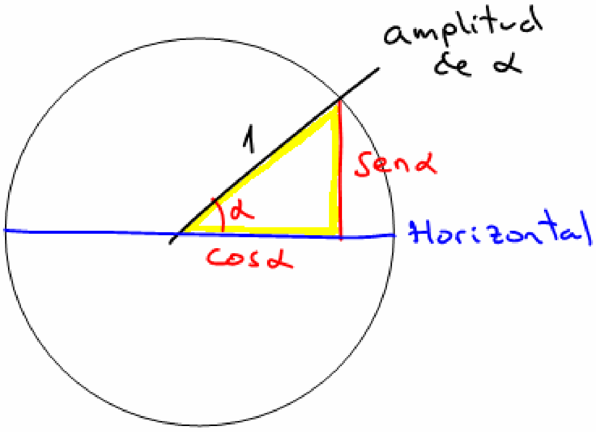
$$x° \text{ ——— } \frac{3\pi}{2} \text{ Rad}$$

$$x = \frac{360 \cdot \frac{3\pi}{2}}{2\pi} = \frac{\frac{360 \cdot 3 \cdot \pi}{2}}{2\pi} = \frac{\frac{1080\pi}{2}}{2\pi} =$$

$$= \frac{540\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \frac{540}{2} = 270°$$

6.2. Razones trigonométricas en triangulos rectángulos.

- Definición. Dada una circunferencia de radio 1. y un angulo agudo cualquiera, se obtiene un triangulo rectangulo formado por la horizontal, el lado que forma la amplitud y la altura de la horizontal con la intersección del angulo con la circunferencia.



Al ser una circunferencia de radio 1, la hipotenusa del triangulo vale 1.
Se define seno del angulo como el cateto de la altura y se define coseno como el cateto que esta apoyado sobre la horizontal.

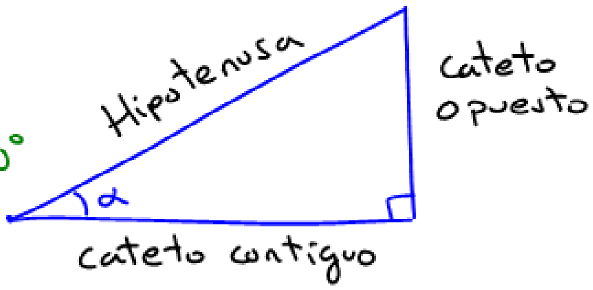
Colegio EL TALLER
Centro Concertado

Ademas definimos tangente del angulo ($tg\alpha$), como el cociente entre el seno y el coseno.
Para cualquier ángulo agudo se puede calcular por medio de una calculadora el $sen\alpha$, $\cos\alpha$ y $tg\alpha$.

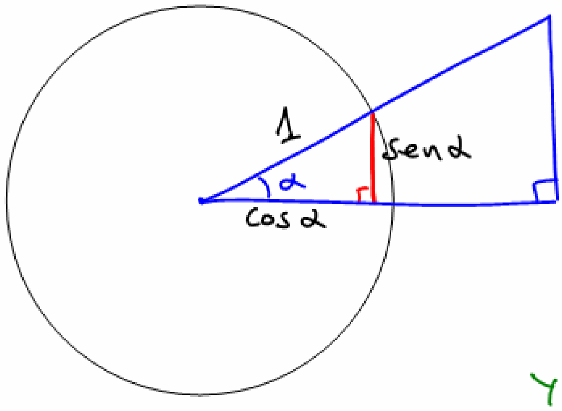
- Razones trigonométricas. Sea α un ángulo agudo en un triángulo rectángulo cualquiera.

Definimos los lados del de la siguiente forma:

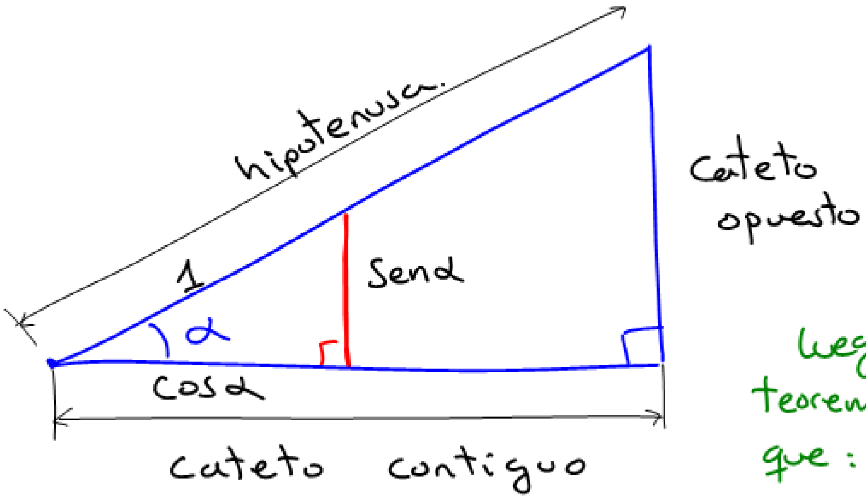
- Hipotenusa: enfrente del angulo 90°
- Cateto opuesto: en frente de α
- cateto contiguo: el cateto que se encuentra junto al angulo α.



Podemos dibujar una circunferencia con centro el vertice del triangulo cuyo ángulo es α.



Observamos que se puede construir otro triangulo semejante (por teorema de tales), cuya hipotenusa mide 1.
Por la definición anterior tenemos que los catetos se denominan $sen\alpha$ y $\cos\alpha$.
Y ademas sus lados son proporcionales al otro triangulo rectangulo.



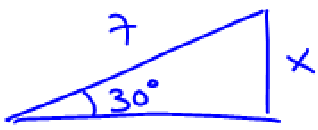
Luego, aplicando el teorema de tales, tenemos que:

$$\frac{\text{Cat. opuesto}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{hipot.}}{1} \Rightarrow \text{Sen } \alpha = \frac{\text{Cat. opuesto}}{\text{hipoten.}}$$

$$\frac{\text{Cat. contig.}}{\cos \alpha} = \frac{\text{hipot}}{1} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\text{Cat. contiguo}}{\text{hipoten.}}$$

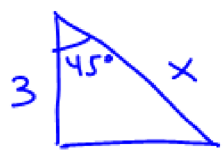
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\text{cat. opuest.}}{\text{hipot.}}}{\frac{\text{cat. contig}}{\text{hipot.}}} = \frac{\text{Cat. opuesto}}{\text{Cat. contiguo}}$$

Ejemplos. Calcula el valor de x



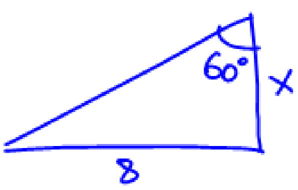
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{7}$$

$$0'5 = \frac{x}{7} \Rightarrow 0'5 \cdot 7 = x \Rightarrow x = 3'5$$



$$\cos 45^\circ = \frac{3}{x}$$

$$0'70 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0'7} \Rightarrow x = 4'28$$



$$\text{tg } 60^\circ = \frac{8}{x}$$

$$1'73 = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{1'73} \Rightarrow x = 4'62$$

Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

6.3. Relaciones entre las razones trigonométricas.

Para un ángulo cualquiera α, se tiene que

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Ejemplo. Demuestra que $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Sabemos que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, luego

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}^{=1}}{\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \text{c.q.d.}$$

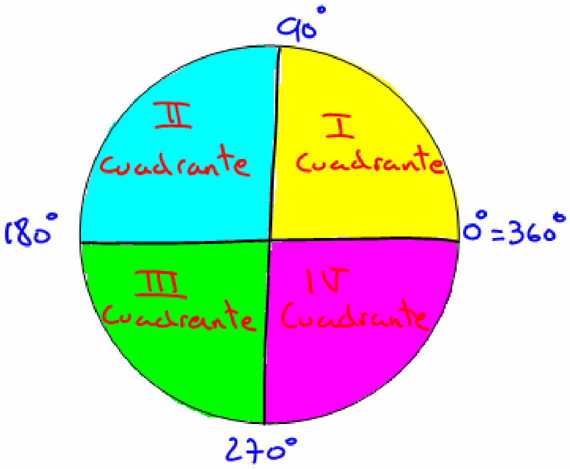
- Tabla de ángulos importantes.

Angulo	Seno	Coseno	tangente
$0°$	0	1	0
$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	No existe
$180°$	0	-1	0
$270°$	-1	0	No existe

6.4. Razones Trigonométricas de un ángulo cualquiera

Hemos definido $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$ para un ángulo menor de $90°$. Vamos a ampliar esta definición para un angulo cualquiera.

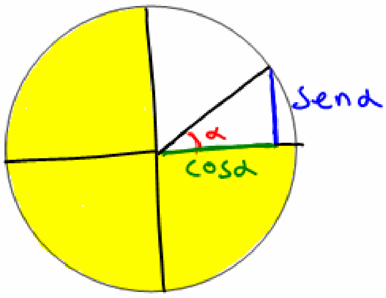
Dada una circunferencia de radio 1, la dividimos en 4 partes iguales (llamados cuadrantes).



I cuadrante: de $0°$ a $90°$
II cuadrante: de $90°$ a $180°$
III cuadrante: de $180°$ a $270°$
IV cuadrante: de $270°$ a $360°$

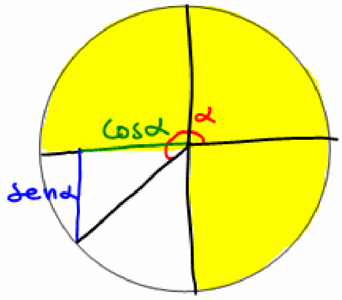
Colegio EL TALLER
Centro Concertado

I Cuadrante



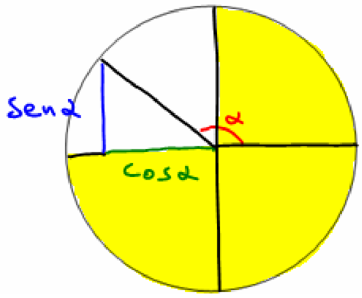
$\text{sen}\,\alpha > 0$
$\cos\alpha > 0$
$\text{tg}\,\alpha > 0$

III Cuadrante



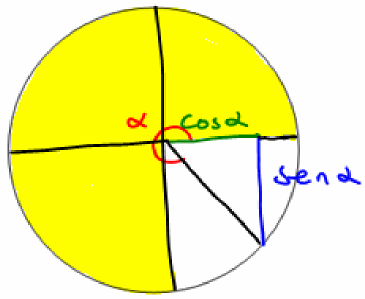
$\text{sen}\,\alpha < 0$
$\cos\alpha < 0$
$\text{tg}\,\alpha > 0$

II Cuadrante



$\text{sen}\,\alpha > 0$
$\cos\alpha < 0$
$\text{tg}\,\alpha < 0$

IV Cuadrante



$\text{sen}\,\alpha < 0$
$\cos\alpha > 0$
$\text{tg}\,\alpha < 0$

Observación. Como el radio de la circunferencia es 1, se tiene que tanto sen α como cos α siempre son menores o igual a 1.

Ejemplo. Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = 3/5$, $\alpha \in \text{II}$. Halla $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$ sin calculadora.

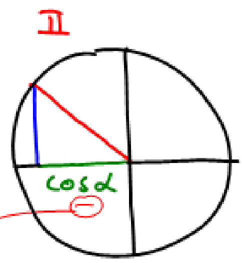
Sabemos que $\left.\begin{array}{l}\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\\ \text{sen}\,\alpha = 3/5\end{array}\right\} \Rightarrow \left(3/5\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$$\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$



$$\cos\alpha = \pm\sqrt{16/25} = \pm\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3\cdot\cancel{5}}{4\cdot\cancel{5}} = -\frac{3}{4}$$

Ejemplo. Sabiendo que $tg\,\alpha = 2$, $\alpha \in$ III. Halla $sen\,\alpha, cos\,\alpha$ sin calculadora.

Sabemos que $\left.\begin{array}{l} sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \\ tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 2 \end{array}\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l} sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \\ \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 2 \end{array}\right. \longrightarrow \boxed{sen\,\alpha = 2 \cdot cos\,\alpha}$$

$$(2\cos\alpha)^2 + cos^2\alpha = 1$$

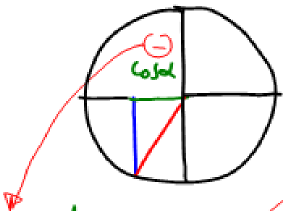
$$4\cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$5\cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$cos\,\alpha = \pm\sqrt{1/5} = \cancel{+}\!\!- \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$cos\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$



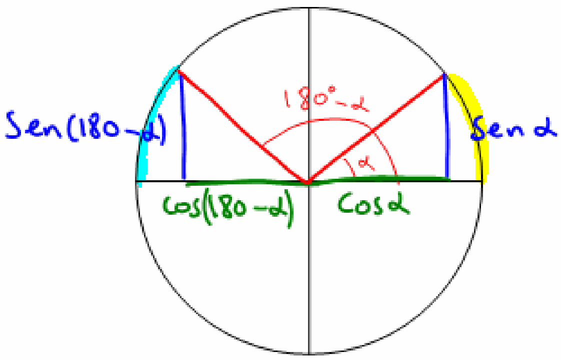
$$sen\,\alpha = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$sen\,\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

6.5. Relaciones entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos.

- Ángulos que suman 180° (ángulos suplementarios).

Sea α un ángulo agudo, lo comparamos con el ángulo $180° - \alpha$ (ya que los dos suman 180°).



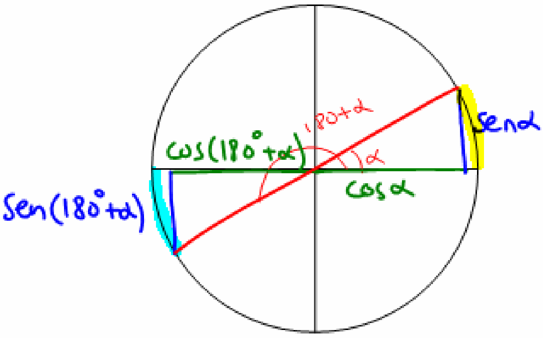
$$\boxed{\begin{array}{l} sen\,(180-\alpha) = sen\,\alpha \\ cos\,(180-\alpha) = -cos\,\alpha \\ tg\,(180-\alpha) = -tg\,\alpha \end{array}}$$

Ejemplo $\quad sen\ 120° = sen\ 60° = \sqrt{3}/2$

$\quad cos\ 135° = -cos\ 45° = -\sqrt{2}/2$

- Angulos que se diferencian en 180°

Sea α un ángulo agudo, lo comparamos con el ángulo $180° + \alpha$ (ya que si resto los dos da 180°)



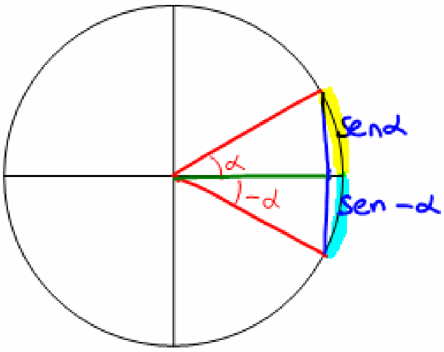
$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(180+\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180+\alpha) &= -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(180+\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}}$$

Ejemplo $\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -1/2$

$\cos 225° = -\cos 45° = -\sqrt{2}/2$

- Angulos opuestos

Sea α un ángulo agudo, lo comparamos con el ángulo $-\alpha$ ó $360-\alpha$



$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}}$$

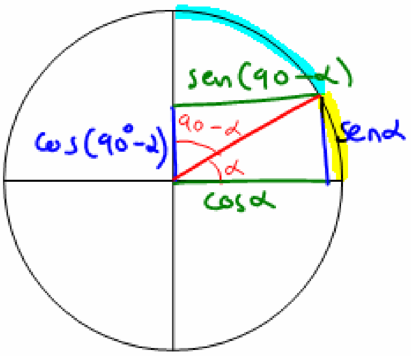
Ejemplo $\operatorname{sen}(-60°) = -\operatorname{sen} 60° = -\sqrt{3}/2$

$\cos 330° = \cos 30° = \sqrt{3}/2$

$\operatorname{tag} 315° = -\operatorname{tag} 45° = -1$

• Ángulos que suman 90° (ángulos complementarios)

Sea α un ángulo agudo, lo comparamos con el ángulo $90-\alpha$ (ya que los dos suman 90°)



$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(90-\alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90-\alpha) &= \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{tg}(90-\alpha) &= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \end{aligned}}$$

Ejemplo

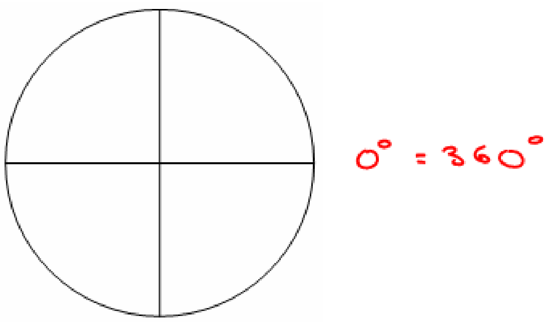
$$\operatorname{sen} 60° = \cos 30° = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 30° = \operatorname{sen} 60° = 1/2$$

$$\operatorname{tag} 60° = \frac{1}{\operatorname{tag} 30°} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

6.6. Razones trigonométricas para ángulos mayores de 360°.

A partir de 360° obtenemos una vuelta completa a la circunferencia y volvemos a empezar.



Por cada 360° se tiene una vuelta completa, para calcular cualquier razón trigonométrica (seno, coseno ó tangente) de un angulo mayor de 360°, dividimos este entre 360°. El cociente de la división indica el numero de vueltas que hemos dado y el resto de la división nos da el ángulo equivalente al ángulo del principio

Colegio EL TALLER
Centro Concertado
Carretera de Fortuna, km 2. 30500 Molina de Segura
Tfno 968614650. Fax 968389210.
Email: info@colegioeltaller.com.
Página Web: http://www.colegioeltaller.com/

Ejemplos.

- $\text{sen } 750° = \text{sen } 30° = 1/2$

$$\begin{array}{l|l} 750 & 360 \\ \hline 30 & 2 \end{array}$$

(e.d. 2 vueltas y 30°)

- $\text{tg } 2565° = \text{tg } 45° = 1$

$$\begin{array}{l|l} 2565 & 360 \\ \hline 45 & 7 \end{array}$$

(e.d. 7 vueltas y 45°)

6.7. Ecuaciones trigonométricas.

Una ecuación trigonometrica es aquella que tiene al menos una incognita dentro de una razón trigonométrica.

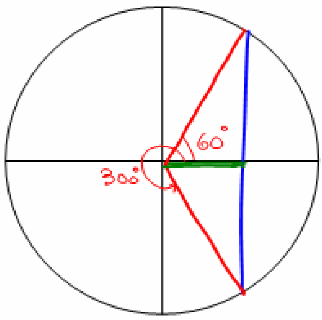
P.e. $3 \cdot \text{sen } x = 2$

Al resolver este tipo de ecuaciones, hay que tener en cuenta que la solución es infinita, ya que por cada 360° se obtiene el mismo resultado en las razones trigonometricas.

Ademas hay que recordar las relaciones de las razones trigonometricas de los angulos en los distintos cuadrantes.

Ejemplo. Resuelve $6 \cos x = 3$

$$6 \cos x = 3$$
$$\cos x = 3/6$$
$$\cos x = 1/2 \Rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360° \cdot k \\ x = 300° + 360° k. \end{cases} \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$



por la tabla de angulos importantes, recordamos que el $\cos 60° = 1/2$, ademas su opuesto tambien vale $1/2$.