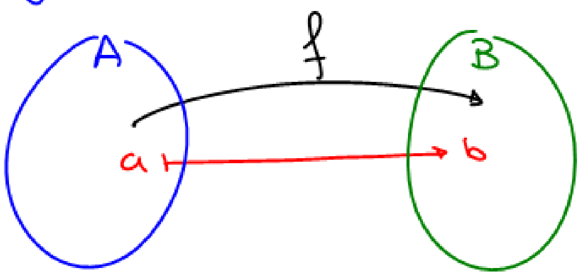
# Tema 10. Funciones

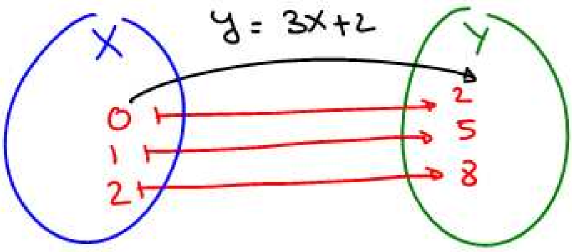
## 10.1. Definición de función.

Una función es una correspondencia de elementos de un conjunto A a elementos de otro conjunto B, donde a un valor del conjunto A le corresponde un único valor del conjunto B.




Ejemplo. Si vemos la expresion $y = 3x + 2$, nos da una función que lleva elementos de X a Y.

| X | Y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 5 |
| 2 | 8 |




El dominio de una función f es el conjunto de todos los valores de A a los que les puedo aplicar la funcion. Se denota Dom f.

El recorrido de una funcion f es el conjunto de todos los valores de B a los que les corresponde un valor del conjunto A.
Se denota Re f ó Im f

## 10.2. Estudio del Dominio.

Dependiendo del tipo de función, tenemos:

- Funciones polinomicas. Su dominio son todos los numeros reales

  P.e. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7 \Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Funciones racionales. Su dominio son todos los números reales menos aquellos que anulan el denominador. Para obtener el dominio resolvemos la ecuación que se crea al igualar a cero el denominador, el dominio de la función son todos los números reales menos las soluciones de la ecuación.

  P.e. $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$

  Resolvemos $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

  luego $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$

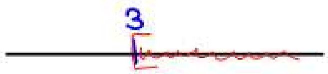
- Funciones radicales. Son del tipo $f(x) = \sqrt{P(x)}$, donde $P(x)$ es un polinomio. El dominio de esta función son aquellos números que al sustituirlos por $x$ en el polinomio da un valor mayor o igual que 0.

  e.d. $\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ P(x) \geq 0\}$

  p.e. $f(x) = \sqrt{x-3}$

  Resolvemos $x - 3 \geq 0$

  $x \geq 3$



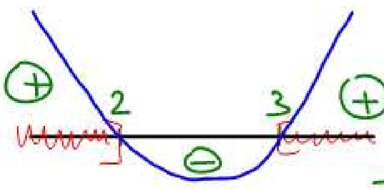

  $x \in [3, \infty) \Rightarrow \text{Dom} f = [3, \infty)$

  p.e. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

  Resolvemos $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \to x^2 - 5x + 6 = 0$

  $$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

  $$= \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$




  $\Rightarrow \text{Dom} f = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

· Funciones logarítmicas. Son del tipo $f(x)=\log_a P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio, y $a$ es un numero positivo. El dominio de esta función son aquellos numeros que al sustituirlos por $x$ en el polinomio da un valor mayor que 0.

e.d. $\quad Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, P(x) > 0\}$

P.e. $f(x) = \log(-3x+1)$

Resolvemos $\quad -3x+1>0$

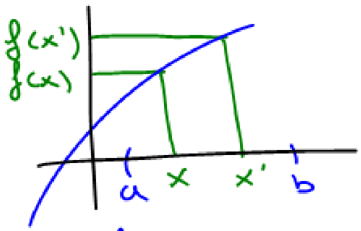
$$-3x > -1$$

$$x < \frac{-1}{-3} \Rightarrow x < \frac{1}{3}$$

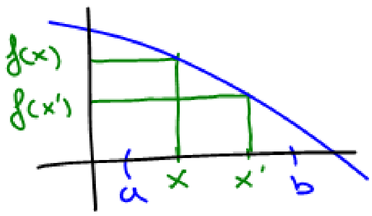

$Dom\, f = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

10.3. Crecimiento y decrecimiento.

Una función $f$ se dice que es creciente en un intervalo $(a,b)$ si dados $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ $\forall\, x, x' \in (a,b)$.




Una función $f$ se dice que es decreciente en un intervalo $(a,b)$ si dados $x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$ $\forall\, x, x' \in (a,b)$.



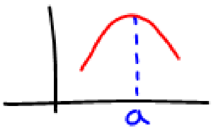

Observación. los intervalos de creciente y decrecimiento se miden en el eje OX.

## 10.4. Máximos y mínimos absolutos y relativos.

Dada una función $f$, se dice que:

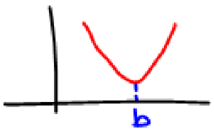
- $x=a$ es un maximo absoluto si $f(a) \geq f(x)$ $\forall x \in Dom f$
- $x=b$ es un mínimo absoluto si $f(b) \leq f(x)$ $\forall x \in Dom f$
- $x=a$ es un máximo relativo si en un entorno cercano de $a$ se tiene que $f(a) \geq f(x)$, donde $x$ pertenece al entorno.

  Son faciles de detectar en la grafica porque tiene forma



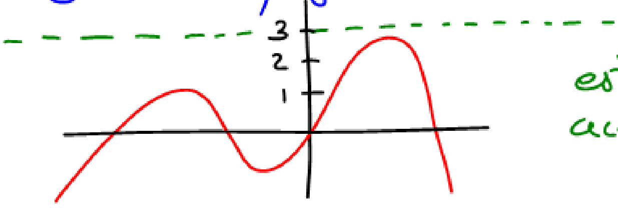

- $x=b$ es un mínimo relativo si en un entorno cercano de $a$ se tiene que $f(a) \leq f(x)$, donde $x$ pertenece al entorno.

  Son faciles de detectar en la grafica porque tiene forma



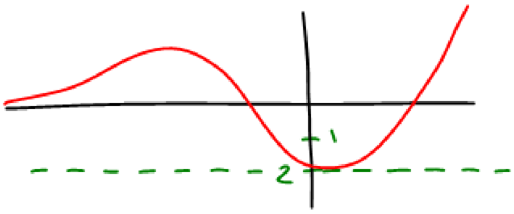

## 10.5. Función acotada.

- Se dice que $f$ esta acotada superiormente si $\exists K \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \leq K$ $\forall x \in Dom f$.




esta función esta acotada superiormente

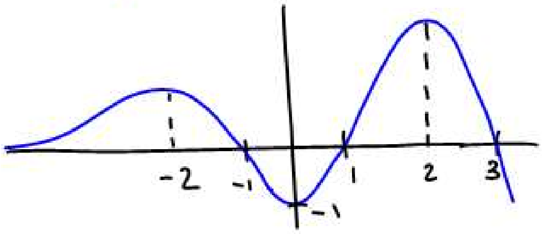
- Se dice que $f$ esta acotada inferiormente si $\exists K \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \geq K$ $\forall x \in Dom f$.




esta función esta acotada inferiorm.

- Se dice que $f$ esta acotada, si esta acotada superiormente e inferiormente.

Ejemplo. Determina los máximos, mínimos, creciente y decreciente, acotada y ptos. de corte con los ejes de la siguiente función.



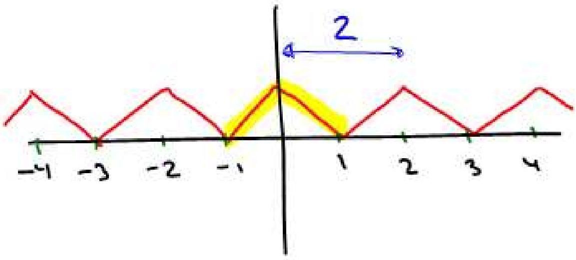

Creciente: $(-\infty,-2)$ , $(0,2)$
Decreciente: $(-2,0)$ , $(2,\infty)$
Maximos relativos: $x=-2$, $x=2$
Maximos absolutos: $x=2$
Minimos relativos: $x=0$
Minimos absolutos: No tiene

Acotada superiormente.
No acotada inferiorm.
Ptos de corte con los ejes
- Eje OX
  $x=-1, x=1, x=3$
- Eje OY
  $y=-1$

10.6. Funciones Periódicas.

Se dice que una función $f$ es periodica de periodo $T$, si $f(x+T)=f(x)\ \forall x\in \mathrm{Dom} f$.

Veamos como ejemplo la siguiente función.




es periodica de periodo $T=2$, ya que la función se repite cada 2.

## 10.7. Funciones simétricas.

Sea $f$ una función. Se dice que $f$ tiene:

- Una simetría Par si $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in Dom f$.
- Una simetría Impar si $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in Dom f$.

Observación. Dada una función, la forma de estudiar la simetría es comenzar siempre por $f(-x)$ (e.d sustituimos "$-x$" por "$x$" en la formula de la función. Si después de hacer operaciones llegamos a $f(x)$ tenemos que es simetría par, si no, calculamos $-f(x)$ (e.d. multiplicar por $(-1)$ todos los términos de la función), si coincide con $f(-x)$ es simetría Impar, en caso contrario la función no es simétrica.

Ejemplo. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

- $f(x) = 3x^2 - 5$

  $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5 = f(x) \Rightarrow$ Simetría Par

- $f(x) = -2x^3 + x$

  $f(-x) = -2(-x)^3 + (-x) = 2x^3 - x$

  $-f(x) = -(-2x^3 + x) = 2x^3 - x$

  $\Rightarrow$ Simetría Impar

- $f(x) = 2x^2 - 5x$

  $f(-x) = 2(-x)^2 - 5(-x) = 2x^2 + 5x$

  $-f(x) = -(2x^2 - 5x) = -2x^2 + 5x$

  $\Rightarrow$ No Simétrica.

## 10.8. Operaciones con funciones.

Dados $f, g$ dos funciones y $k$ un número, se tiene que:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in \text{Dom} f \cap \text{Dom} g$$

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in \text{Dom} f.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in \text{Dom} f \cap \text{Dom} g.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in \text{Dom} f \cap \text{Dom} g \text{ y } g(x) \neq 0$$

Ejemplos. Sea $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = x^2 + 2$. Calcula.

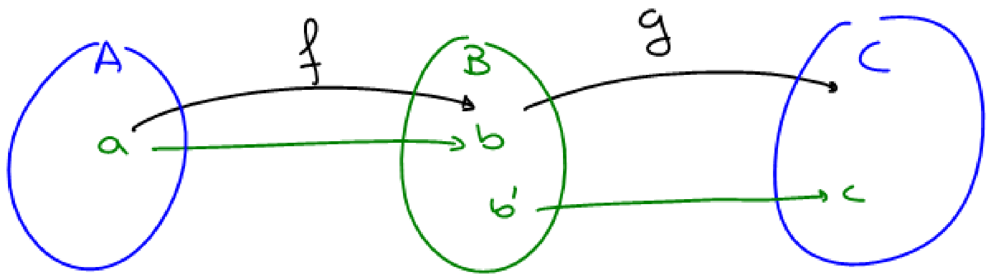
$$3f(x) = 3 \cdot (3x-1) = 9x - 3$$

$$(f-g)(x) = 3x - 1 - (x^2+2) = -x^2 + 3x - 3$$

$$(f \cdot g)(x) = (3x-1) \cdot (x^2+2) = 3x^3 + 6x - x^2 - 2 =$$
$$= 3x^3 - x^2 + 6x - 2$$

## 10.9. Composición de funciones.

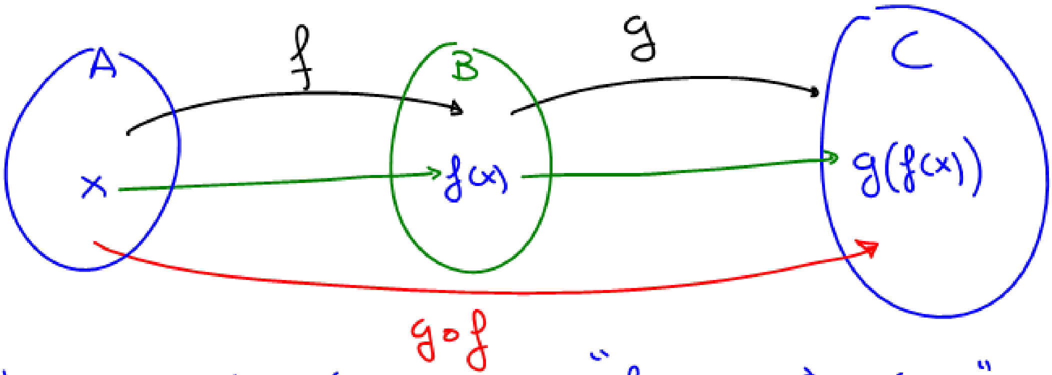
Sea $f$ una función que va del conjunto A al conjunto B, y sea $g$ otra función que va del conjunto B a otro conjunto C.




Podemos crear una nueva función que vaya del conjunto A al conjunto C de la siguiente forma:

- dado un valor $x \in A$, le aplicamos la función $f$ para pasarlo al conjunto B y luego le aplicamos la función $g$ para pasarlo al conjunto C.

es decir




esta nueva función se llama "f compuesta de g" (se lee al reves de como se escribe) y se denota por $g \circ f$. Viene definida por la formula.

$$\boxed{g \circ f\,(x) = g(\,f(x))}$$

Ejemplo. Sea $f(x) = 3x-1$ y $g(x) = x^2+2$. Calcula.

$$f \circ g\,(x) = f(g(x)) = f(x^2+2) = 3(x^2+2)-1 =$$
$$= 3x^2+6-1 = 3x^2+5.$$

$$g \circ f(x) = g(\,f(x)) = g(3x-1) = (3x-1)^2+2 =$$
$$= 9x^2 - 2\cdot 3x\cdot 1 + 1 + 2 = 9x^2-6x+3$$

$$f \circ f(x) = f(\,f(x)) = f(3x-1) = 3(3x-1)-1 =$$
$$= 9x-3-1 = 9x-4$$

## 10.10. Función recíproca.

Definicion. Se llama función identidad, y se denota por id(x), a la funcion que cumple:

$$f \circ id\,(x) = f(x)$$
$$id \circ f\,(x) = f(x)$$

para cualquier función $f$

La función identidad viene dada por la formula.

$$id(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea $f$ una función, se define función reciproca de $f$ (se denota $f^{-1}$), como la única función que cumple

$$f^{-1} \circ f = id$$
$$f \circ f^{-1} = id.$$

Ejercicio tipico. Halla y comprueba la función reciproca de $f(x) = 3x-7$.

$f(x) = 3x-7$ ← Cambio $f(x)$ por $y$.

$y = 3x-7$ ← Despejamos $x$

$y+7 = 3x$

$\frac{y+7}{3} = x$ ← Cambio $x$ por $y$ e $y$ por $x$.

$\frac{x+7}{3} = y$ esta es la función reciproca $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$

Comprobación.

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-7) = \frac{3x-7+7}{3} = \frac{3x}{3} = x = id(x)$$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+7}{3}\right) = \cancel{3}\cdot\left(\frac{x+7}{\cancel{3}}\right) - 7 = x + \cancel{7} - \cancel{7} = x =$$
$$= id(x)$$