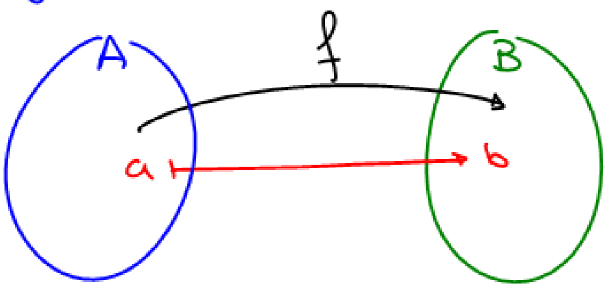
Tema 12. Funciones

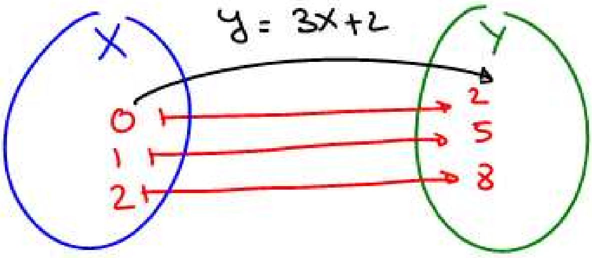
12.1. Definición de función:

Una función es una correspondencia de elementos de un conjunto A a elementos de otro conjunto B, donde a un valor del conjunto A le corresponde un único valor del conjunto B.



Ejemplo. Si vemos la expresión $y = 3x + 2$, nos da una función que lleva elementos de X a Y.

X	Y
0	2
1	5
2	8



El dominio de una función f es el conjunto de todos los valores de A a los que les puedo aplicar la función. Se denota Domf.

El recorrido de una función f es el conjunto de todos los valores de B a los que les corresponde un valor del conjunto A.
Se denota Ref ó Imf

12.2. Estudio del Dominio.

Dependiendo del tipo de función, tenemos:

- Funciones polinomicas. Su dominio son todos los numeros reales

  P.e. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7 \Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R}$.

- Funciones racionales. Su dominio son todos los números reales menos aquellos que anulan el denominador. Para obtener el dominio resolvemos la ecuación que se crea al igualar a cero el denominador, el dominio de la función son todos los números reales menos las soluciones de la ecuación.

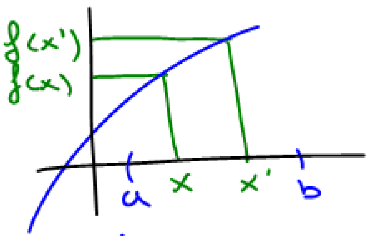
  P.e. $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$

  Resolvemos $x-2=0 \Rightarrow x=2$

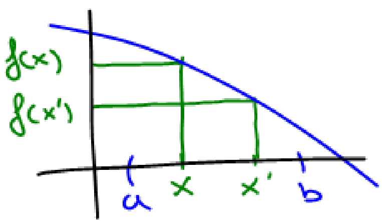
  luego $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$

12.3. Crecimiento y decrecimiento.

Una función f se dice que es creciente en un intervalo (a,b) si: dados $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ $\forall x, x' \in (a,b)$.



Una función f se dice que es decreciente en un intervalo (a,b) si: dados $x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$ $\forall x, x' \in (a,b)$.



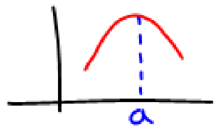
Observación. los intervalos de creciente y decrecimiento se miden en el eje OX.

12.4. Máximos y mínimos absolutos y relativos.

Dada una función f, se dice que:

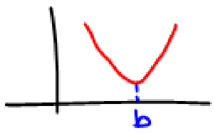
- $x = a$ es un maximo absoluto si $f(a) \geq f(x)$ $\forall x \in Dom f$
- $x = b$ es un mínimo absoluto si $f(b) \leq f(x)$ $\forall x \in Dom f$
- $x = a$ es un máximo relativo si en un entorno cercano de a se tiene que $f(a) \geq f(x)$, donde x pertenece al entorno.

  Son faciles de detectar en la grafica porque tiene forma



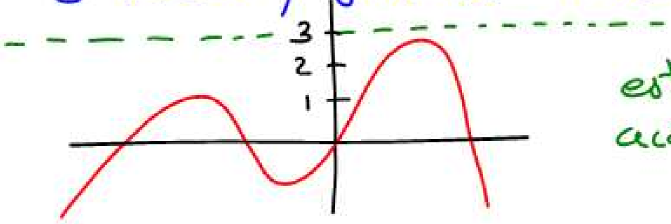
- $x = b$ es un mínimo relativo si en un entorno cercano de a se tiene que $f(a) \leq f(x)$, donde x pertenece al entorno.

  Son faciles de detectar en la grafica porque tiene forma



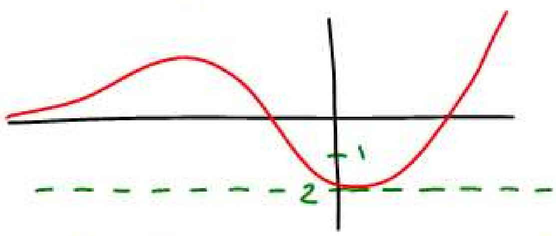
12.5. Función acotada.

- Se dice que f esta acotada superiormente si $\exists K \in \mathbb{R}$ / $f(x) \leq K$ $\forall x \in Dom f$.



esta función esta acotada superiormente

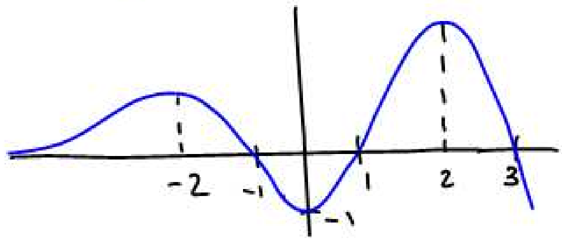
- Se dice que f esta acotada inferiormente si $\exists K \in \mathbb{R}$ / $f(x) \geq K$ $\forall x \in Dom f$.



esta función esta acotada inferiorm.

- Se dice que f esta acotada, si esta acotada superiormente e inferiormente.

Ejemplo. Determina los máximos, mínimos, creciente y decreciente, acotada y ptos. de corte con los ejes de la siguiente función.



Creciente: $(-\infty,-2)$, $(0,2)$

Decreciente: $(-2,0)$, $(2,\infty)$

Maximos relativos: $x=-2$, $x=2$

Maximos absolutos: $x=2$

Minimos relativos: $x=0$

Minimos absolutos: No tiene

Acotada superiormente.

No acotada inferiorm.

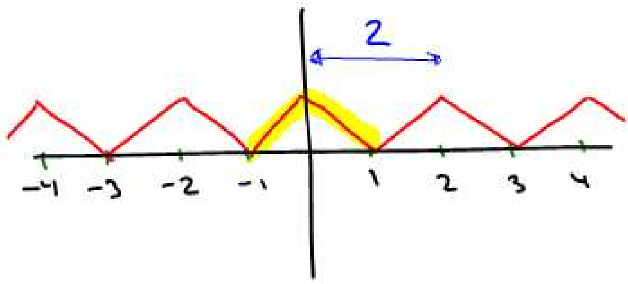
Ptos de corte con los ejes

- Eje OX
  $x=-1$, $x=1$, $x=3$
- Eje OY
  $y=-1$

12.6. Funciones Periódicas.

Se dice que una función f es periodica de periodo T, si $f(x+T)=f(x)$ $\forall x \in Dom f$.

Veamos como ejemplo la siguiente función.



es periodica de periodo $T=2$, ya que la función se repite cada 2.

12.7. Funciones simétricas.

Sea f una función. Se dice que f tiene:

- Una simetría Par si $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in Dom f$.
- Una simetría Impar si $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in Dom f$.

Observación. Dada una función, la forma de estudiar la simetría es comenzar siempre por $f(-x)$ (e.d sustituimos "$-x$" por "x" en la formula de la función. Si despues de hacer operaciones llegamos a $f(x)$ tenemos que es simetría par, si no, calculamos $-f(x)$ (e.d. multiplicar por (-1) todos los términos de la función), si coincide con $f(-x)$ es simetría Impar, en caso contrario la función no es simétrica.

Ejemplo. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

- $f(x) = 3x^2 - 5$

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5 = f(x) \Rightarrow \text{simetría Par}$$

- $f(x) = -2x^3 + x$

$$f(-x) = -2(-x)^3 + (-x) = 2x^3 - x$$
$$-f(x) = -(-2x^3 + x) = 2x^3 - x$$
$$\Rightarrow \text{simetría Impar}$$

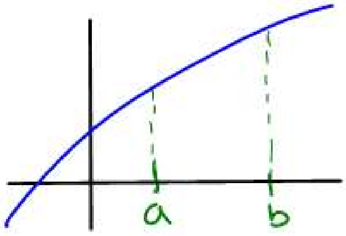
- $f(x) = 2x^2 - 5x$

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 5(-x) = 2x^2 + 5x$$
$$-f(x) = -(2x^2 - 5x) = -2x^2 + 5x$$
$$\Rightarrow \text{No simetrica.}$$

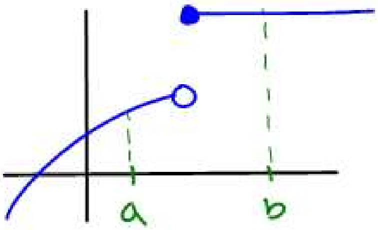
12.8. Continuidad de una Función.

Una función f se dice que es continua en un intervalo (a,b) si al ver su representación gráfica la función no presenta ningún salto en los ptos. pertenecientes al intervalo.

E.d. en el intervalo (a,b) la gráfica se puede dibujar de un solo trazo.



Función continua en el intervalo (a,b)



Funcion discontinua en el intervalo (a,b)