Tema 14. Técnicas de Recuento

14.1. Variación sin repetición.

Una variación sin repetición de m elementos tomados en grupos n en n, son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo hay n elementos distintos.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de variaciones viene dado por la formula:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

Ejemplo. Entre 20 alumnos se tiene que elegir a un delegado, un subdelegado y un responsable de material. ¿Cuantas elecciones posibles existen?

Elementos : 1,2,3,4,...,19,20

$(1,2,3)$, $(1,3,2)$ → Importa el orden

$(1,\cancel{1},5)$ → No se pueden repetir

$$\Rightarrow V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot \underbrace{(20-3+1)}_{=18} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6.840$$

14.2. Variación con Repetición.

Una variación con repetición de m elementos tomados en grupos n en n, son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo hay n elementos repetidos o no.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de variaciones viene dado por la formula:

$$VR_{m,n} = m^n$$

Ejemplo. ¿Cuantas apuestas distintas existen en las quinielas?

Elementos : 1, x, 2.

$(1,1,x,x,1,x,2,2,1,1,x,x,1,1,x)$ ⇒ 3 elementos en grupos de 15 y se pueden repetir

⇒ $VR_{3,15} = 3^{15} = 14.348.907$ apuestas distintas.

14.3. Permutaciones.

Una permutación de m elementos son los distintos grupos que se pueden formar, de manera que:

- En cada grupo estén los m elementos.
- Un grupo se diferencia de otro únicamente en el orden de colocación de los elementos.

El número de permutaciones viene dado por la formula:

$$P_m = m! = m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

Ejemplo. ¿De cuantas formas distintas se pueden sentar 6 amigos en 6 butacas de cine?

Elementos 1,2,3,4,5,6

(1,2,3,4,6,5)
(1,2,4,3,6,5) $\rightarrow$ $P_6 = 6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$ formas

14.4. Combinaciones.

Una combinación de m elementos tomados en grupos de n en n, son los distintos grupos que podemos formar con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo hay n elementos distintos.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento (no importa el orden).

El número de combinaciones viene dado por la formula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

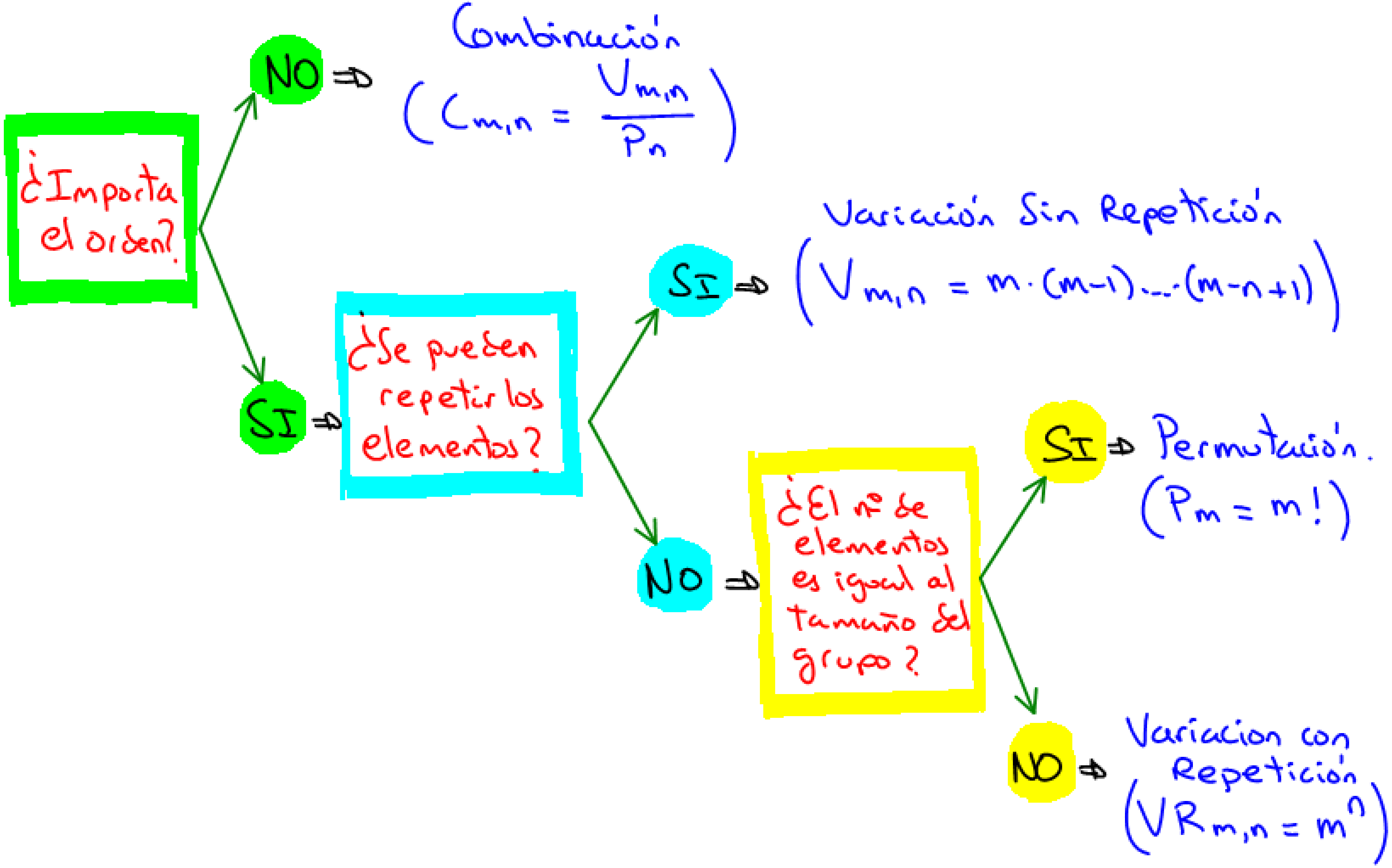
Ejemplo. En una fiesta hay 15 personas. ¿Cuantos saludos ha habido en total?

Elementos. 1,2,3,...9,10.

(1,2)
(1,3)
~~(3,1)~~ $\rightarrow$ No importa el orden
~~(1,1)~~ $\rightarrow$ No se puede repetir

$$\rightarrow C_{10,2} = \frac{V_{10,2}}{P_2} = \frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot\overbrace{(10-2+1)}^{9}}{2\cdot 1} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45 \text{ saludos}$$

14.5. Esquema de las Técnicas de Recuento.



14.6. Binomio de Newton.

Se denomina número combinatorio a $\binom{m}{n}$, donde m y n son números ($m \geq n$), y viene dado por la formula:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Sus propiedades son:

- $\binom{n}{0} = 1$ para cualquier número n.
- $\binom{n}{n} = 1$ para cualquier número n
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ para cualquier número n

Ejemplo.
- $\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336$
- $\binom{8}{0} = 1$
- $\binom{8}{7} = 8$

A partir de los números combinatorios se puede obtener una formula para calcular el binomio elevado a cualquier numero natural (binomio de Newton), y dice así:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}\cdot b^i =$$
$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Ejemplo. Calcula $(x+5)^3$

$$(x+5)^3 = \underbrace{\binom{3}{0}}_{=1} x^3 + \underbrace{\binom{3}{1}}_{=3} x^2\cdot 5 + \underbrace{\binom{3}{2}}_{=3} x\cdot 5^2 + \underbrace{\binom{3}{3}}_{=1} 5^3 =$$

$$= x^3 + 3\cdot x^2\cdot 5 + 3x\cdot 25 + 125 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

Observación. Para calcular los numeros combinatorios sin obtenerlo por la formula, se utiliza una regla llamada Triangulo de Tartaglia, que es simplemente construir un triangulo de números (empezando por el vertice superior que vale 1) y teniendo en cuenta:

- Los números que estan en los extremos valen 1.
- Un número del interior se obtiene a partir de la suma de los dos números que tiene encima.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow \text{fila de } \binom{1}{i} \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow \text{fila de } \binom{2}{i} \\
 & & 1=\binom{3}{0} & & 3=\binom{3}{1} & & 3=\binom{3}{2} & & 1=\binom{3}{3} & & \longrightarrow \text{fila de } \binom{3}{i} \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \vdots \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$